TRADUIT DU RUSSE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

N. PISKOUNOV

Tome II

ÉDITIONS DE MOSCOU

N. PISKOUNOV

CALCUL DIFFÉRENTIEL et INTÉGRAL

tome II

9e édition

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe

На французском языке

© Traduction française Editions Mir 1980

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à la cinquième édition 13

CHAPITRE XIII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Position du problème. Equation du mouvement du corps pour un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Equation de la chaînette 15
§ 2. Définitions 18
§ 3. Equations différentielles du premier ordre (notions générales) 19
§ 4. Equations à variables séparées et séparables. Problème de la désintégration du radium 25
§ 5. Equations homogènes du premier ordre 29
§ 6. Equations se ramenant aux équations homogènes 31
§ 7. Equations linéaires du premier ordre 34
§ 8. Equation de Bernoulli 37
§ 9. Equations aux différentielles totales 39
§ 10. Facteur intégrant 42
§ 11. Enveloppe d'une famille de courbes 44
§ 12. Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre 51
§ 13. Equation de Clairaut 52
§ 14. Equation de Lagrange 55
§ 15. Trajectoires orthogonales et isogonales 56
§ 16. Equations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales) 62
§ 17. Equation de la forme $y^{(n)} = f(x)$ 63
§ 18. Quelques types d'équations différentielles du second ordre se ramenant à des équations du premier ordre. Problème de la deuxième vitesse cosmique 66
§ 19. Intégration graphique des équations différentielles du second ordre 74
§ 20. Equations linéaires homogènes. Définitions et propriétés générales 76
§ 21. Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants 83
§ 22. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants 88

§ 23. Equations linéaires non homogènes du second ordre 91
§ 24. Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants 95
§ 25. Equations linéaires non homogènes d'ordre n 101
§ 26. Equation différentielle d'oscillations mécaniques 105
§ 27. Oscillations libres. Représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques 107
§ 28. Oscillations forcées 110
§ 29. Systèmes d'équations différentielles ordinaires 115
§ 30. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants 120
§ 31. Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier 127
§ 32. Solution approchée des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler 142
§ 33. Solution approchée des équations différentielles par la méthode des différences finies basée sur l'application de la formule de Taylor. Méthode d'Adams 145
§ 34. Méthode de Runge-Kutta 152
§ 35. Méthode approchée d'intégration des systèmes d'équations différentielles du premier ordre 157
Exercices 162

CHAPITRE XIV

INTÉGRALES MULTIPLES

§ 1. Intégrale double 176
§ 2. Calcul des intégrales doubles 178
§ 3. Calcul des intégrales doubles (suite) 184
§ 4. Application des intégrales doubles au calcul d'aires et de volumes 191
§ 5. Intégrales doubles en coordonnées polaires 193
§ 6. Changement de variables dans une intégrale double (cas général) 200
§ 7. Calcul des aires de surfaces 205
§ 8. Densité de distribution de matière et intégrale double 209
§ 9. Moment d'inertie d'une figure plane 210
§ 10. Coordonnées du centre de gravité d'une figure plane 215
§ 11. Intégrales triples 217
§ 12. Calcul des intégrales triples 218
§ 13. Changement de variables dans une intégrale triple 223
§ 14. Moment d'inertie et coordonnées du centre de gravité d'un corps 227
§ 15. Intégrales dépendant d'un paramètre 229
Exercices 231

CHAPITRE XV

INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

§ 1. Intégrale curviligne 238
§ 2. Calcul de l'intégrale curviligne 241
§ 3. Formule de Green 248
§ 4. Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration 250
§ 5. Intégrales de surface 255
§ 6. Calcul des intégrales de surface 257
§ 7. Formule de Stokes 260
§ 8. Formule d'Ostrogradsky 265
§ 9. Opérateur hamiltonien et quelques applications 267
Exercices 271

CHAPITRE XVI

SÉRIES

§ 1. Série. Somme d'une série 277
§ 2. Condition nécessaire de convergence d'une série 280
§ 3. Comparaison des séries à termes positifs 283
§ 4. Règle de d'Alembert 285
§ 5. Règle de Cauchy 289
§ 6. Comparaison avec une intégrale 290
§ 7. Séries alternées. Théorème de Leibniz 294
§ 8. Séries à termes de signes quelconques. Convergence absolue et semi-convergence 296
§ 9. Séries de fonctions 300
§ 10. Séries majorables 301
§ 11. Continuité de la somme d'une série 303
§ 12. Intégration et dérivation des séries 306
§ 13. Séries entières ou séries de puissances. Intervalle de convergence 309
§ 14. Dérivation des séries entières 314
§ 15. Séries de puissances de $x - a$ 315
§ 16. Séries de Taylor et de Maclaurin 316
§ 17. Exemples de développement de fonctions en séries 318
§ 18. Formule d'Euler 320
§ 19. Formule générale du binôme 321
§ 20. Développement de la fonction Log $(1 + x)$ en série entière. Calcul de logarithmes 324
§ 21. Application des séries au calcul d'intégrales définies 326
§ 22. Application des séries à l'intégration d'équations différentielles 328
§ 23. Equation de Bessel 331
§ 24. Séries à termes complexes 336
§ 25. Séries entières d'une variable complexe 337

§ 26. Résolution de l'équation différentielle du premier ordre par la méthode des approximations successives (méthode d'itération) 339
§ 27. Démonstration de l'existence de la solution d'une équation différentielle. Evaluation de l'erreur d'une solution approchée . . . 341
§ 28. Théorème d'unicité de la solution de l'équation différentielle 346
Exercices 347

CHAPITRE XVII

SÉRIES DE FOURIER

§ 1. Définition. Position du problème 356
§ 2. Exemples de développement de fonctions en séries de Fourier 360
§ 3. Une remarque sur le développement des fonctions périodiques en séries de Fourier 366
§ 4. Séries de Fourier des fonctions paires et impaires 368
§ 5. Séries de Fourier des fonctions de période $2l$ 369
§ 6. Sur le développement en série de Fourier d'une fonction non périodique 371
§ 7. Approximation en moyenne d'une fonction donnée au moyen de polynômes trigonométriques 373
§ 8. Intégrale de Dirichlet 379
§ 9. Convergence d'une série de Fourier en un point donné 381
§ 10. Quelques conditions suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier 383
§ 11. Analyse harmonique numérique 386
§ 12. Série de Fourier sous forme complexe 387
§ 13. Intégrale de Fourier 389
§ 14. Forme complexe de l'intégrale de Fourier 393
§ 15. Série de Fourier suivant un système orthogonal de fonctions 396
§ 16. Notion d'espace fonctionnel linéaire. Analogie entre le développement de fonctions en séries de Fourier et la décomposition des vecteurs 398
Exercices 403

CHAPITRE XVIII

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1. Principaux types d'équations de la physique mathématique . . . 405
§ 2. Etablissement de l'équation pour des cordes vibrantes. Formulation du problème aux limites. Etablissement de l'équation pour des oscillations électriques dans un conducteur 406
§ 3. Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de séparation des variables (méthode de Fourier) 410
§ 4. Equation de la propagation de la chaleur dans une barre. Enoncé du problème aux limites 413

§ 5. Propagation de la chaleur dans l'espace 416
§ 6. Résolution du premier problème aux limites pour l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies 419
§ 7. Propagation de la chaleur dans une barre infinie 421
§ 8. Problèmes conduisant a l'étude des solutions de l'équation de Laplace. Enoncé des problèmes aux limites 427
§ 9. Equation de Laplace en coordonnées cylindriques. Résolution du problème de Dirichlet pour un anneau avec des valeurs constantes de la fonction recherchée sur les circonférences intérieure et extérieure 432
§ 10. Résolution du problème de Dirichlet pour le cercle 434
§ 11. Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies 437
Exercices 440

CHAPITRE XIX

CALCUL OPÉRATIONNEL ET APPLICATIONS

§ 1. Original et image 444
§ 2. Image des fonctions $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$ 446
§ 3. Image des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante. Image des fonctions $\sin at$, $\cos at$ 447
§ 4. Propriété de linéarité de l'image 448
§ 5. Théorème du déplacement 449
§ 6. Image des fonctions $e^{-\alpha t}$, $\operatorname{sh} \alpha t$, $\operatorname{ch} \alpha t$, $e^{-\alpha t} \sin at$, $e^{-\alpha t} \cos at$. 450
§ 7. Dérivation de l'image 451
§ 8. Image des dérivées 453
§ 9. Dictionnaire d'images 454
§ 10. Equation auxiliaire d'une équation différentielle donnée . . . 456
§ 11. Théorème de décomposition 460
§ 12. Exemples de résolution des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel 461
§ 13. Théorème de convolution 463
§ 14. Equations différentielles des oscillations mécaniques. Equations différentielles de la théorie des circuits électriques 466
§ 15. Résolution de l'équation différentielle des oscillations 467
§ 16. Etude des oscillations libres 469
§ 17. Etude des oscillations harmoniques amorties dans le cas d'une force extérieure périodique 469
§ 18. Solution de l'équation des oscillations dans le cas de la résonance 471
§ 19. Théorème du retard 473
§ 20. La fonction delta et son image 474
Exercices 477

CHAPITRE XX

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS ET DE LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1. Evénement aléatoire. Fréquence relative d'un événement aléatoire Probabilité d'un événement. Objet de la théorie des probabilités 480
§ 2. Définition classique de la probabilité et calcul direct des probabilités 481
§ 3. Somme des probabilités. Evénements aléatoires contraires . . . 484
§ 4. Produit des probabilités des événements indépendants 488
§ 5. Evénements dépendants. Probabilité conditionnelle. Probabilité totale 489
§ 6. Probabilités des causes. Formule de Bayes 493
§ 7. Variable aléatoire discrète. Loi de distribution d'une variable aléatoire discrète 495
§ 8. Fréquence relative et probabilité de la fréquence relative au cours des épreuves répétées 497
§ 9. Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète . . . 502
§ 10. Variance. Ecart quadratique moyen. Notion de moments . . . 506
§ 11. Fonction de variables aléatoires 510
§ 12. Variable aléatoire continue. Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue. Probabilité pour qu'une variable aléatoire appartienne à un intervalle donné 511
§ 13. Fonction de répartition ou loi intégrale de distribution. Loi de distribution uniforme 515
§ 14. Caractéristiques numériques d'une variable aléatoire continue 518
§ 15. Loi normale de distribution. Espérance mathématique de la distribution normale 521
§ 16. Variance et écart quadratique moyen d'une variable aléatoire suivant la loi de distribution normale 524
§ 17. Probabilité d'appartenance d'une valeur de la variable aléatoire à un intervalle donné. Fonction de Laplace. Fonction de répartition de la loi normale 525
§ 18. Ecart médian 529
§ 19. Expression de la loi normale en fonction de l'écart médian. Fonction réduite de Laplace 531
§ 20. Règle des trois sigmas. Echelle des probabilités de distribution des erreurs 532
§ 21. Erreur arithmétique moyenne 534
§ 22. Mesure de précision. Relations entre les caractéristiques de distribution des erreurs. 534
§ 23. Variable aléatoire bidimensionnelle 535
§ 24. Loi normale de distribution sur le plan 539
§ 25. Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle normalement distribuée appartienne à un rectangle de côtés parallèles aux axes principaux de dispersion 541

§ 26. Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle prenne une valeur appartenant à l'ellipse de dispersion 543
§ 27. Problèmes de la statistique mathématique. Matériel statistique 544
§ 28. Série statistique. Histogramme 545
§ 29. Détermination de la valeur acceptable d'une grandeur mesurée 548
§ 30. Estimation des paramètres de la loi de distribution. Théorème de Liapounov. Théorème de Laplace 550
Exercices 554

CHAPITRE XXI

MATRICES. ÉCRITURE MATRICIELLE DES SYSTÈMES ET RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

§ 1. Transformations linéaires. Matrice 557
§ 2. Définitions générales liées à la notion de matrice 560
§ 3. Transformation inverse 562
§ 4. Opérations sur les matrices. Addition des matrices 564
§ 5. Transformation d'un vecteur en un autre vecteur à l'aide d'une matrice 569
§ 6. Matrice inverse 570
§ 7. Calcul de la matrice inverse 571
§ 8. Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires et des solutions d'un système d'équations linéaires 573
§ 9. Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode matricielle 574
§ 10. Application orthogonale. Matrices orthogonales 577
§ 11. Vecteur propre d'une transformation linéaire 580
§ 12. Matrice d'une transformation linéaire pour laquelle les vecteurs de base sont les vecteurs propres 583
§ 13. Transformation de la matrice d'une transformation linéaire lors du passage d'une base à une autre 585
§ 14. Formes quadratiques et leur transformation 587
§ 15. Rang d'une matrice. Existence des solutions d'un système d'équations linéaires 589
§ 16. Dérivation et intégration des matrices 591
§ 17. Ecriture matricielle d'un système d'équations différentielles et des solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients constants 593
§ 18. Ecriture matricielle d'une équation linéaire du n-ième ordre 598
§ 19. Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables par la méthode des approximations successives en utilisant l'écriture matricielle 600
Exercices 604
Annexes 606
Index 609

AVANT-PROPOS A LA CINQUIÈME ÉDITION

La cinquième édition en langue française du présent manuel diffère de la quatrième.

Cette nouvelle édition, entièrement révisée et complétée, contient le matériel indispensable actuellement pour la préparation mathématique des élèves des écoles techniques supérieures. Il est exposé de façon que les étudiants et les ingénieurs puissent aborder les disciplines appliquées, basées sur l'appareil mathématique.

C'est dans ce second tome du manuel que les changements les plus profonds ont été introduits.

On y a inclus deux nouveaux chapitres: le chapitre XX « Eléments de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique » et le chapitre XXI « Matrices. Ecriture matricielle des systèmes et résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires ». On y utilise également l'écriture matricielle pour des résolutions approchées successives des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. La nécessité d'inclure ce matériel dans un cours de calcul différentiel et intégral pour les écoles techniques est liée au fait que l'étude des solutions des systèmes d'équations différentielles est, dans de nombreux ouvrages d'électrotechnique, de radiotechnique et d'automatique, conduite à l'aide de l'appareil de la théorie des matrices.

Dans le chapitre XIII, le paragraphe 31 « Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov » a été notablement élargi. Il est maintenant intitulé ainsi: « Notions sur la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier ». Ici parallèlement à la considération de la stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles on étudie le comportement des trajectoires à proximité d'un point singulier dans le plan de phase. Cela était indispensable car lors de l'étude des questions correspondantes dans les cours liés à l'automation on doit savoir utiliser couramment ces notions. Ce chapitre comporte aussi un nouveau paragraphe 34 sur la méthode de Runge-Kutta de la solution approchée des équations différentielles.

Le chapitre XVI a été complété par les paragraphes 26, 27, 28. On considère ici la méthode des approximations successives des

solutions des équations différentielles, on y démontre les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle. On a accentué la rigueur de l'exposé de tout le chapitre consacré aux équations différentielles.

On a écrit de nouveaux paragraphes 24 et 25 du chapitre XVI consacrés aux séries à termes complexes et aux séries entières d'une variable complexe. Le nouveau paragraphe 12 du chapitre XVII est consacré aux séries de Fourier sous forme complexe. Le problème de l'intégrale de Fourier étant exposé plus en détails, on a élucidé certaines notions largement utilisées dans les applications (spectre, fonction spectrale). On a inséré dans le même chapitre les nouveaux paragraphes 15 « Série de Fourier suivant un système orthogonal de fonctions » et 16 « Notion d'espace fonctionnel linéaire. Analogie entre le développement de fonctions en séries de Fourier et la décomposition des vecteurs ».

Lors de la révision du chapitre XVIII « Equations de la physique mathématique » on a attaché une importance particulière à l'analyse de la nature des phénomènes physiques conduisant aux équations de différents types et aux problèmes aux limites correspondants.

On a ajouté un nouveau paragraphe 20 « Fonction delta et son image » au chapitre XIX exposant les notions fondamentales du calcul opérationnel et la méthode opérationnelle de résolution des équations différentielles. Elles sont indispensables pour l'étude de nombreuses disciplines appliquées, notamment de celles qui sont liées à l'électrotechnique.

De nombreux problèmes et exercices, illustrant pour la plupart des liens qui existent entre les mathématiques et les autres disciplines, ont été inclus dans le manuel. Les problèmes et les exercices ont été spécialement choisis pour chaque chapitre du cours afin de contribuer à l'assimilation de la partie théorique. Certains ont été résolus et commentés à titre d'exemples. Cela rend ce manuel également utile pour l'étude autodidacte.

L'auteur

Chapitre XIII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Position du problème. Equation du mouvement du corps pour un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Equation de la chaînette

Supposons que la fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. Examinant ce phénomène, il est souvent impossible d'établir directement le caractère de la dépendance entre y et x, mais l'on peut établir une dépendance entre les quantités x, y et les dérivées de y par rapport à x : y', y'', ..., $y^{(n)}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire une équation différentielle.

On demande de déduire de la relation entre x, y et les dérivées la relation directe entre y et x, c'est-à-dire de trouver $y = f(x)$, ce qu'on appelle encore intégrer une équation différentielle.

Considérons deux exemples.

Exemple 1. On laisse tomber un corps de masse m d'une certaine hauteur. On demande d'établir la loi de variation de la vitesse de chute v si le corps éprouve une résistance de freinage de la part de l'air proportionnelle à la vitesse (le coefficient de proportionnalité étant k), c'est-à-dire de trouver $v = f(t)$.

Solution. En vertu de la seconde loi de Newton

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps en mouvement (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) et F la force agissant sur le corps dans le sens du mouvement. Cette force est constituée de deux forces : de la force de pesanteur mg et de la résistance de l'air $-kv$ (on prend le signe moins car cette force est opposée à la vitesse). Ainsi

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{1}$$

Nous avons une relation entre la fonction inconnue v et sa dérivée $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire une équation différentielle portant sur la fonction inconnue v. (C'est l'équation du mouvement de certains types de parachutes.) Résoudre cette équation différentielle, c'est chercher une fonction $v = f(t)$ la vérifiant identiquement. Il existe une infinité de telles solutions. Le lecteur vérifiera facilement que toute fonction de la forme

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{2}$$

vérifie l'équation (1) quelle que soit la constante C. Mais laquelle de ces fonctions donne la relation cherchée entre v et t ? Pour la trouver, imposons une condition

supplémentaire: une vitesse initiale v_0 (qui, notamment, peut être nulle) a été communiquée au corps au départ; nous supposerons que cette vitesse initiale est connue. Mais alors la fonction cherchée $v = f(t)$ doit être telle que l'on ait pour $t = 0$ (au début du mouvement) $v = v_0$. Substituant $t = 0$, $v = v_0$ dans la formule (2), on trouve:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k},$$

d'où

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Ainsi, la constante C est déterminée. La dépendance entre v et t s'exprime donc:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \qquad (2')$$

Il découle de cette formule que pour t suffisamment grands la vitesse v dépend peu de v_0.

Notons que si $k = 0$ (c'est-à-dire si la résistance de l'air est nulle ou négligeable), on retrouve un résultat connu en physique *):

$$v = v_0 + gt. \qquad (2'')$$

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle (1) et à la condition initiale: $v = v_0$ pour $t = 0$.

Exemple 2. Un fil flexible homogène est suspendu par ses deux extrémités. Trouver l'équation de la courbe d'équilibre du fil soumis à son propre poids (telle est la position que prennent les fils, les chaînes, les câbles suspendus).

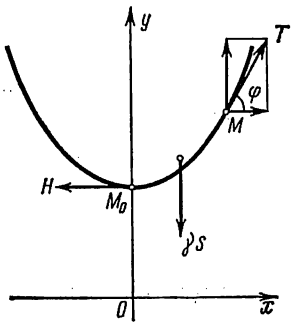


Fig. 249

Solution. Soient M_0 $(0, b)$ le point le plus bas sur le fil, M un point arbitraire sur ce fil (fig. 249). Considérons la portion de fil M_0M. Cette portion est en équilibre sous l'action de trois forces:

1) la tension T, agissant tangentiellement au point M et formant avec l'axe Ox l'angle φ;

2) la tension H au point M_0, agissant horizontalement;

3) le poids γs dirigé verticalement vers le bas, où s est la longueur de l'arc M_0M, γ le poids spécifique du fil.

Décomposant la tension T en ses composantes horizontale et verticale, on obtient les équations d'équilibre:

$$T \cos \varphi = H,$$
$$T \sin \varphi = \gamma s.$$

---

*) On peut déduire la formule (2″) à partir de (2′) par le passage à la limite

$$\lim_{k \to 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

On obtient en divisant membre à membre ces deux égalités

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\gamma}{H}s. \tag{3}$$

Supposons maintenant que l'on puisse écrire l'équation de la courbe cherchée sous la forme $y = f(x)$. Ici, $f(x)$ est une fonction inconnue qu'il faut chercher. Remarquons que

$$\operatorname{tg}\varphi=f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}s, \tag{4}$$

où l'on a posé $\frac{H}{\gamma}=a$.

Dérivons les deux membres de l'égalité (4) par rapport à x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\frac{ds}{dx}. \tag{5}$$

Mais on sait que (voir § 1, ch. VI)

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Substituant cette expression dans l'équation (5), on obtient l'équation différentielle de la courbe cherchée sous la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6}$$

Elle relie les dérivées première et seconde de la fonction inconnue y.

Sans nous arrêter sur les méthodes de résolution des équations, indiquons que toute fonction de la forme

$$y=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+C_1\right)+C_2 \tag{7}$$

satisfait à l'équation (6) quelles que soient les constantes C_1 et C_2. Il est facile de s'en convaincre en substituant les dérivées première et seconde de la fonction mentionnée dans l'équation (6). Indiquons encore sans le démontrer qu'on a là toutes les solutions (pour divers C_1 et C_2) de l'équation (6). Cela sera démontré au § 18.

Les graphiques des fonctions ainsi obtenues sont appelés des *chaînettes*.

Voyons maintenant comment il convient de choisir les constantes C_1 et C_2 pour obtenir précisément la chaînette dont le point inférieur a pour coordonnées $(0, b)$. Etant donné que pour $x = 0$ on a le point le plus bas de la chaînette, la tangente est horizontale en ce point, c.-à-d. $\frac{dy}{dx} = 0$. En outre, par hypothèse, l'ordonnée est égale à b en ce point, c.-à-d. $y = b$.

On déduit de l'équation (7)

$$y'=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+C_1\right).$$

Substituant dans cette dernière $x = 0$, on obtient $0 = \operatorname{sh} C_1$. Donc $C_1 = 0$. Si b est l'ordonnée de M_0, on a alors $y = b$ pour $x = 0$. On déduit de

l'équation (7) en posant $x = 0$ et $C_1 = 0$, $b = \frac{a}{2}(1 + 1) + C_2$, d'où $C_2 = b - a$. On trouve en définitive:

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) + b - a.$$

L'équation (7) se simplifie beaucoup si l'on prend l'ordonnée du point M_0 égale à a. L'équation de la chaînette devient alors:

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

§ 2. Définitions

Définition 1. On appelle *équation différentielle* une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées y', y'', . . ., $y^{(n)}$.

On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suit:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Si $y = f(x)$ est fonction d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle est dite ordinaire. Nous nous bornerons à l'étude des équations différentielles ordinaires *).

Définition 2. On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Ainsi,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

est une équation du premier ordre.

---

*) En même temps que les équations différentielles ordinaires, on étudie également en analyse mathématique des équations aux dérivées partielles. On appelle *équation aux dérivées partielles* une relation entre la fonction inconnue z, dépendant de deux ou de plusieurs variables x, y, . . ., ces variables elles-mêmes et les dérivées partielles de z: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc.

On a comme exemple d'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue $z(x, y)$ l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $z = x^2y^2$ (ainsi que quantité d'autres fonctions) vérifie cette équation.

Dans ce cours les équations aux dérivées partielles sont étudiées dans le chapitre XVIII (t. II).

L'équation

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

est une équation du second ordre, etc.

L'équation considérée dans l'exemple 1 du paragraphe précédent est une équation du premier ordre et celle de l'exemple 2 du second ordre.

Définition 3. On appelle *solution* ou *intégrale* d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

Exemple 1. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Les fonctions $y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ et, plus généralement, toute fonction de la forme $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ ou

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

sont des solutions de l'équation donnée quelles que soient les constantes C_1 et $_2$; il est facile de s'en assurer en substituant ces fonctions dans l'équation.

Exemple 2. Considérons l'équation

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Ses solutions sont des fonctions de la forme

$$y = x^2 + Cx,$$

où C est une constante arbitraire. En effet, on trouve en dérivant la fonction $y = x^2 + Cx$:

$$y' = 2x + C.$$

Substituant les expressions de y et y' dans l'équation donnée, on obtient l'identité

$$(2x + C)\,x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Chacune des équations traitées dans les exemples 1 et 2 possède une infinité de solutions.

§ 3. Equations différentielles du premier ordre (notions générales)

1. Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Lorsque cette équation est résoluble en y', on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y). \tag{1'}$$

On dit alors que l'équation différentielle est résoluble par rapport à la dérivée. On a pour une telle équation le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème. *Si dans l'équation*

$$y' = f(x, y)$$

la fonction $f(x, y)$ *et sa dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *par rapport à* y *sont continues dans un certain domaine* D *du plan* Oxy *et si* (x_0, y_0) *est un point de ce domaine, il existe une solution unique* $y = \varphi(x)$ *satisfaisant à la condition* $y = y_0$ *lorsque* $x = x_0$.

Ce théorème sera démontré au § 27, chapitre XVI. Géométriquement, le théorème signifie qu'il existe une fonction $y = \varphi(x)$ et une seule dont la courbe représentative passe par le point (x_0, y_0).

Il résulte de ce théorème que l'équation (1') possède une infinité de solutions différentes [par exemple, la solution passant par le point (x_0, y_0); la solution passant par le point (x_0, y_1); celle passant par le point (x_0, y_2), etc., pourvu que ces points se trouvent dans le domaine D].

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$ s'appelle la *condition initiale*. Souvent on l'écrit sous la forme

$$y\,|_{x=x_0} = y_0.$$

Définition 1. On appelle *solution générale* d'une équation du premier ordre une fonction

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

dépendant d'une constante arbitraire C et satisfaisant aux conditions suivantes:

a) elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante C;

b) quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$, c.-à-d. $(y)_{x=x_0} = y_0$, on peut trouver une valeur $C = C_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, C_0)$ vérifie la condition initiale donnée. On suppose alors que les valeurs x_0 et y_0 appartiennent au domaine de variation des variables x et y dans lequel sont observées les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.

2. Cherchant la solution générale d'une équation différentielle, nous sommes souvent conduits à une relation de la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2'}$$

non résolue en y. On obtient la solution générale en résolvant cette relation par rapport à y. Toutefois, il n'est pas toujours possible d'exprimer y à partir de (2') au moyen de fonctions élémentaires; on conserve alors la solution générale sous forme implicite. Une égalité de la forme $\Phi(x, y, C) = 0$, donnant implicitement la solution générale, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle.

Définition 2. On appelle *solution particulière* toute fonction $y = \varphi(x, C_0)$ déduite de la solution générale $y = \varphi(x, C)$, en posant dans cette dernière $C = C_0$. La relation $\Phi(x, y, C_0) = 0$ est dite alors une *intégrale particulière* de l'équation.

Exemple 1. L'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

a pour solution générale une famille de fonctions $y = \frac{C}{x}$; on peut le vérifier par une simple substitution dans l'équation.

Cherchons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $y_0 = 1$ lorsque $x_0 = 2$. Substituant ces valeurs dans la formule $y = \frac{C}{x}$, on obtient $1 = \frac{C}{2}$ ou $C = 2$. La solution particulière cherchée est donc la fonction $y = \frac{2}{x}$.

Du point de vue géométrique, l'intégrale générale représente une famille de courbes planes dépendant d'un paramètre C. Ces courbes sont appelées les courbes intégrales de l'équation différentielle donnée. Une intégrale particulière est représentée par une courbe de cette famille passant par un point donné du plan.

Ainsi, dans l'exemple considéré, l'intégrale générale est représentée géométriquement par la famille d'hyperboles $y = \frac{C}{x}$ et l'intégrale particulière, définie par la condition initiale donnée, par l'hyperbole passant par le point $M_0(2, 1)$. On a représenté sur la figure 250 les courbes de la famille correspondant aux diverses valeurs: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Pour faciliter les raisonnements, nous appellerons par la suite solution de l'équation non seulement la fonction $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaisant à l'équation proposée, mais encore la courbe intégrale correspondante. Ceci étant, on parlera, par exemple, de la solution passant par le point (x_0, y_0).

Remarque. L'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ n'admet pas de solution passant par un point de l'axe Oy (fig. 250). Ceci est dû à ce que le second membre de l'équation est indéterminé pour $x = 0$ et, par conséquent, n'est pas continu.

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à:

a) chercher sa solution générale ou son intégrale générale (si les conditions initiales ne sont pas données) ou

b) chercher la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).

3. Donnons l'interprétation géométrique des équations différentielles du premier ordre.

Soit donnée une équation différentielle résolue par rapport à la dérivée :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1'}$$

et soit $y = \varphi(x, C)$ sa solution générale. Cette solution générale définit la famille de courbes intégrales dans le plan Oxy.

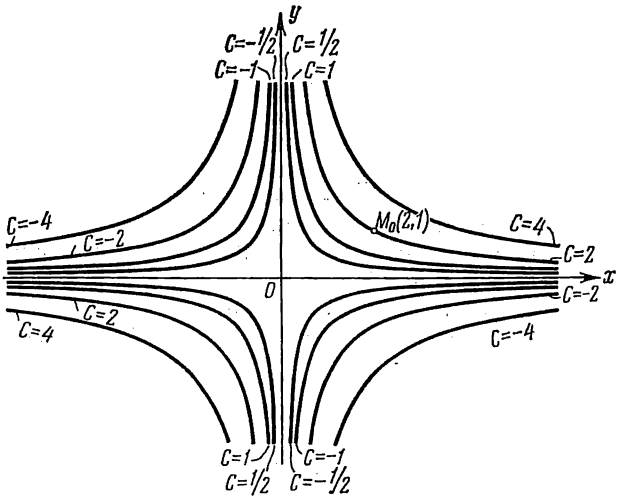


Fig. 250

L'équation (1') détermine pour tout point M, de coordonnées x et y, une valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, c.-à-d. le coefficient angulaire de la tangente à la courbe intégrale passant par ce point. Par conséquent, l'équation différentielle (1') définit un ensemble de directions ou, comme on dit, un c h a m p d e d i r e c t i o n s dans le plan Oxy.

Du point de vue géométrique, l'intégration d'une équation différentielle consiste à trouver les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec la direction du champ en ce point.

On appelle *isocline* de l'équation différentielle (1) le lieu géométrique des points vérifiant la relation $\frac{dy}{dx} = C = \text{const}$.

A chaque valeur de C correspond une isocline. Il est évident que pour la valeur C l'isocline aura pour équation $f(x, y) = C$.

La famille des isoclines construite, nous pouvons représenter approximativement la famille des courbes intégrales. Les isoclines permettent donc de définir l'allure des courbes intégrales dans le plan.

La fig. 251 représente le champ de directions déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Les isoclines de cette équation sont

$$-\frac{y}{x} = C, \text{ ou } y = -Cx.$$

C'est le faisceau de droites que l'on voit sur la même figure.

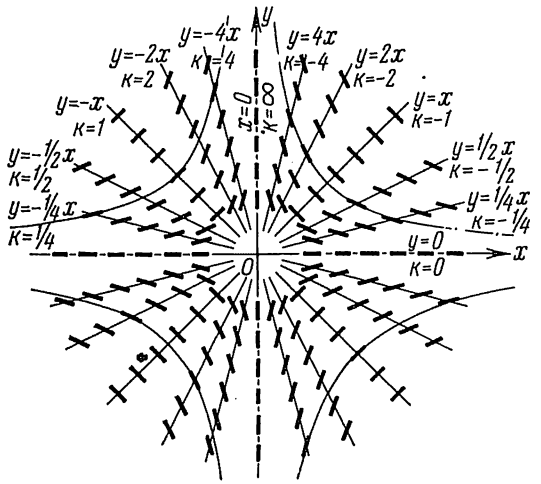


Fig. 251

4. Considérons ensuite le problème suivant.

Soit donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre C:

$$y = \varphi(x, C) \tag{2}$$

telle que par tout point du plan (ou d'un domaine dans le plan) il ne passe qu'une courbe de cette famille.

On demande quelle est l'équation différentielle admettant cette famille de fonctions pour intégrale générale.

On trouve en dérivant la relation (2) par rapport à x:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \tag{3}$$

Etant donné qu'il ne passe qu'une seule courbe de la famille par tout point du plan, chaque couple de valeurs x, y définit une seule valeur C dans l'équation (2). Substituant cette valeur C dans la relation (3), on trouve $\frac{dy}{dx}$ en tant que fonction de x et de y. On obtient ainsi une équation différentielle qui est vérifiée par toute fonction de la famille (2).

Il en résulte que pour établir le lien entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, c.-à-d. pour

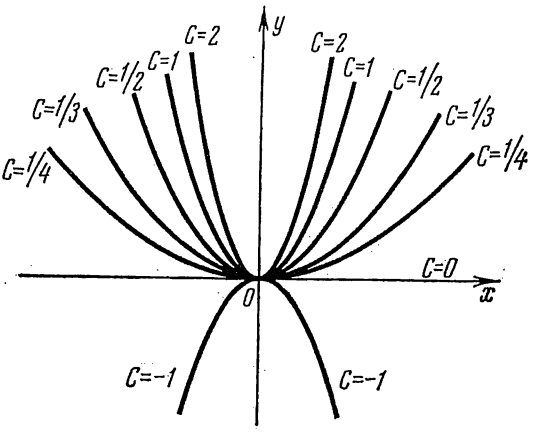


Fig. 252

écrire l'équation différentielle admettant pour intégrale générale la formule (2), il faut éliminer C des expressions (2) et (3).

Exemple 2. Trouver l'équation différentielle de la famille de paraboles $y = Cx^2$ (fig. 252).

On trouve en dérivant par rapport à x l'équation de la famille

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Substituant $C = \frac{y}{x^2}$ définie par l'équation de la famille, on obtient l'équation différentielle de la famille donnée :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Cette équation a un sens lorsque $x \neq 0$, c.-à-d. dans tout domaine ne coupant pas l'axe Oy.

§ 4. Equations à variables séparées et séparables. Problème de la désintégration du radium

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{1}$$

où le second membre est le produit d'une fonction dépendant seulement de x par une fonction dépendant seulement de y. Transformons-la comme suit (en supposant que $f_2(y) \neq 0$) :

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x)\, dx. \tag{1'}$$

Supposant que la fonction y de x soit connue, on peut considérer (1') comme l'égalité de deux différentielles, et leurs primitives se distingueront par une constante. Intégrant le premier membre par rapport à y et le second par rapport à x, on obtient :

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)\, dx + C. \tag{1''}$$

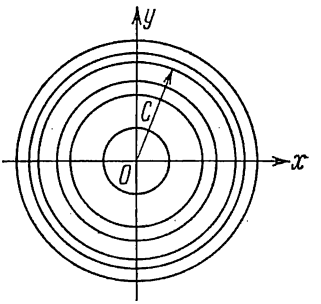


Fig. 253

Nous avons obtenu une relation entre la solution y, la variable indépendante x et la constante arbitraire C, c.-à-d. qu'on a l'intégrale générale de l'équation (1).

1. L'équation différentielle (1')

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0 \tag{2}$$

est appelée équation à *variables séparées*. Comme on vient de le démontrer, son intégrale générale est

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C.$$

Exemple 1. Soit l'équation à variables séparées

$$x\, dx + y\, dy = 0.$$

Son intégrale générale est

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Le premier membre n'étant pas négatif, il en est de même du second. Désignons $2C_1$ par C^2, on aura :

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

C'est l'équation d'une famille de cercles concentriques (fig. 253) centrés à l'origine des coordonnées et de rayon C.

2. Une équation de la forme

$$M_1(x)\, N_1(y)\, dx + M_2(x)\, N_2(y)\, dy = 0 \tag{3}$$

est appelée une équation à *variables séparables*. Elle peut être ramenée *) à une équation à variables séparées en divisant les deux membres par l'expression $N_1(y)\,M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dx+\frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dy=0$$

ou

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0,$$

qui est une équation de la forme (2).

Exemple 2. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Séparons les variables:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

On trouve par intégration

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+C,$$

donc

$$\operatorname{Log}|y|=-\operatorname{Log}|x|+\operatorname{Log}|C|\text{**) ou } \operatorname{Log}|y|=\operatorname{Log}\left|\frac{C}{x}\right|;$$

d'où l'en déduit la solution générale $y=\dfrac{C}{x}$.

Exemple 3. Soit l'équation

$$(1+x)\,y\,dx+(1-y)\,x\,dy=0.$$

Séparons les variables:

$$\frac{1+x}{x}\,dx+\frac{1-y}{y}\,dy=0;$$

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0.$$

On obtient en intégrant:

$$\operatorname{Log}|x|+x+\operatorname{Log}|y|-y=C \text{ ou } \operatorname{Log}|xy|+x-y=C$$

qui est l'intégrale générale de l'équation proposée.

Exemple 4. La vitesse de désintégration du radium est directement proportionnelle à sa masse à l'instant considéré. Déterminer la loi de variation de la masse du radium en fonction du temps, sachant qu'à l'instant $t=0$ la masse était m_0.

---

*) Ces transformations sont légitimes seulement dans un domaine où ni $N_1(y)$ ni $M_2(x)$ ne s'annulent.

**) Ayant en vue les transformations ultérieures, nous avons désigné la constante arbitraire par $\operatorname{Log}|C|$, ce qui est légitime, car $\operatorname{Log}|C|$ (lorsque $C\neq 0$) peut prendre n'importe quelle valeur de $-\infty$ à $+\infty$.

On détermine la vitesse de désintégration comme suit. Soient m la masse à l'instant t et $m + \Delta m$ la masse à l'instant $t + \Delta t$. La masse désintégrée dans le temps Δt est Δm. Le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne de la désintégration. La limite de ce rapport lorsque $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

est la *vitesse de désintégration* à l'instant t.

D'après les conditions du problème

$$\frac{dm}{dt} = -km, \tag{4}$$

où k est un coefficient de proportionnalité ($k > 0$). Nous avons introduit le signe moins, étant donné que la masse décroît quand le temps croît et que, par conséquent, $\frac{dm}{dt} < 0$.

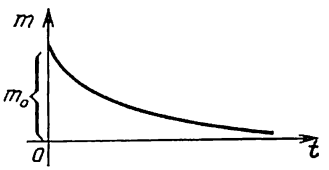


Fig. 254

L'équation (4) est une équation à variables séparables. Séparons les variables :

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt.$$

On obtient en intégrant :

$$\operatorname{Log} m = -kt + \operatorname{Log} C,$$

d'où

$$\operatorname{Log} \frac{m}{C} = -kt,$$

$$m = Ce^{-kt}. \tag{5}$$

Etant donné que la masse du radium était m_0 à l'instant $t = 0$, C doit satisfaire à la relation

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Substituant la valeur de C dans l'égalité (5), on obtient l'expression cherchée voir fig. 254) de la masse en fonction du temps :

$$m = m_0 e^{-kt}. \tag{6}$$

On déduit le coefficient k des observations comme suit. Soit α % la fraction de la masse initiale désintégrée dans le temps t_0. On a donc la relation

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

d'où

$$-kt_0 = \text{Log}\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$$

ou

$$k = -\frac{1}{t_0}\text{Log}\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right).$$

On a établi de cette manière que pour le radium $k = 0{,}000436$ (l'unité de temps étant l'année).

Substituant cette valeur de k dans la formule (6), on obtient

$$m = m_0 e^{-0{,}000436t}.$$

Trouvons la période de désintégration du radium, c.-à-d. le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale du radium. Substituant dans cette dernière formule $\frac{m_0}{2}$ au lieu de m, on obtient l'équation définissant la période T cherchée :

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000436T},$$

d'où

$$-0{,}000436T = -\text{Log } 2$$

ou

$$T = \frac{\text{Log } 2}{0{,}000436} = 1590 \text{ années.}$$

Remarquons que d'autres problèmes de la physique et de la chimie conduisent également à l'équation de la forme (4).

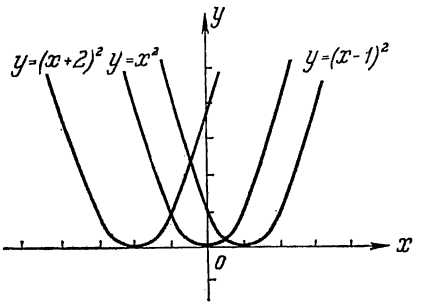


Fig. 255

Remarque 1. Supposons que la fonction $f_2(y)$ de l'équation (1) admette pour racine $y = b$, c'est-à-dire que $f_2(b) = 0$. Il est alors évident que la fonction $y = b$ est une solution de l'équation (1), ce qu'on vérifie aisément par une substitution directe dans cette équation. La solution $y = b$ n'est pas toujours donnée par la formule (1″).

Sans aborder l'analyse de ce cas, notons tout simplement que sur la droite $y = b$ la condition d'unicité peut être violée.

Voyons cela sur un exemple : l'équation $y' = 2\sqrt{y}$ admet pour solution générale $y = (x + c)^2$. La solution $y = 0$, elle, ne découle pas de la solution générale. Sur la droite $y = 0$ la condition d'unicité est violée (fig. 255).

Remarque 2. L'équation différentielle à variables séparées la plus simple est

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ ou } dy = f(x)\,dx.$$

Son intégrale générale s'écrit

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Nous nous sommes occupés de la résolution d'équations de ce type au chapitre X.

§ 5. Equations homogènes du premier ordre

Définition 1. On dit que la fonction $f(x, y)$ est une *fonction homogène de degré n* par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout λ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 1. La fonction $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ est homogène et de degré 1, car

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3} = \lambda\sqrt[3]{x^3+y^3} = \lambda f(x, y).$$

Exemple 2. $f(x, y) = xy - y^2$ est une fonction homogène du second degré, car $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2(xy - y^2)$.

Exemple 3. $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{xy}$ est une fonction homogène de degré zéro, car $\dfrac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \dfrac{x^2-y^2}{xy}$, c.-à-d. que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ ou $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$.

Définition 2. L'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

est dite *homogène* par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y.

Résolution de l'équation homogène. On a par hypothèse $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Posant dans cette identité $\lambda = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

c.-à-d. qu'une fonction homogène de degré zéro dépend seulement du rapport $\dfrac{y}{x}$.

L'équation (1) s'écrit alors sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Faisons la substitution :

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{c.-à-d.} \quad y = ux.$$

On a alors :

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x.$$

Substituant cette expression de la dérivée dans l'équation (1'), on obtient

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u).$$

C'est une équation à variables séparables :

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{ou} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Substituant après intégration $\frac{y}{x}$ à u, on obtient l'intégrale de l'équation (1').

Exemple 4. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

On a dans le second membre une fonction homogène de degré zéro, donc l'équation proposée est homogène. Faisons le changement de variables $\frac{y}{x} = u$; alors

$$y = ux\,; \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}\,;$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}\,; \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

Séparons les variables, on a :

$$\frac{(1 - u^2)\,du}{u^3} = \frac{dx}{x}\,; \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x},$$

et par intégration :

$$-\frac{1}{2u^2} - \operatorname{Log}|u| = \operatorname{Log}|x| + \operatorname{Log}|C| \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2u^2} = \operatorname{Log}|ux\,C|.$$

Substituant $u = \frac{y}{x}$, on obtient l'intégrale générale de l'équation initiale :

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \operatorname{Log}|Cy|.$$

Il est impossible d'exprimer ici y en fonction de x au moyen des fonctions élémentaires. Mais l'on exprime facilement x en fonction de y :

$$x = y\sqrt{-2\operatorname{Log}|Cy|}.$$

Remarque. L'équation

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

ne sera homogène que si $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions homogènes du même degré. Ceci résulte du fait que le rapport de deux

fonctions homogènes d'un seul et même degré est une fonction homogène de degré zéro.

Exemple 5. Les équations

$$(2x + 3y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0,$$
$$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

sont homogènes.

§ 6. Equations se ramenant aux équations homogènes

Se ramènent aux équations homogènes les équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}. \tag{1}$$

Si $c_1 = c = 0$, l'équation (1) est évidemment homogène. Supposons maintenant que c et c_1 (ou l'un d'eux) ne soient pas nuls. Faisons le changement de variables:

$$x = x_1 + h, \qquad y = y_1 + k.$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{2}$$

Substituant dans l'équation (2) les expressions des quantités x, y, $\frac{dy}{dx}$, on obtient:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \tag{3}$$

Choisissons h et k de manière qu'ils vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

c.-à-d. définissons h et k en tant que solutions du système d'équations (4). L'équation (3) devient alors homogène:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Résolvant cette équation et revenant aux anciennes variables x et y d'après les formules (2), on obtient la solution de l'équation (1).

Le système (4) n'a pas de solution lorsque

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

c.-à-d. que $ab_1 = a_1 b$. Mais alors $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ ou $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, et l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}. \tag{5}$$

La substitution

$$z = ax + by \tag{6}$$

ramène alors l'équation donnée à une équation à variables séparables.

En effet,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \tag{7}$$

Substituant les expressions (6) et (7) dans l'équation (5), on obtient

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1}$$

qui est une équation à variables séparables.

Le procédé utilisé pour intégrer l'équation (1) s'applique également à l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

où f est une fonction arbitraire continue.

Exemple 1. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}.$$

Pour la ramener à une équation homogène, faisons la substitution $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$. Alors

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}.$$

Résolvant le système de deux équations

$$h + k - 3 = 0; \quad h - k - 1 = 0,$$

on trouve:

$$h = 2, \quad k = 1.$$

On obtient ainsi l'équation homogène

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

qu'on résout en faisant la substitution

$$\frac{y_1}{x_1}=u;$$

on a :

$$y_1=ux_1; \quad \frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1};$$

$$u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u},$$

et on obtient une équation à variables séparables :

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,du=\frac{dx_1}{x_1}.$$

On trouve en intégrant :

$$\operatorname{arc\,tg} u-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+u^2)=\operatorname{Log}|x_1|+\operatorname{Log}|C|,$$

$$\operatorname{arc\,tg} u=\operatorname{Log}|Cx_1\sqrt{1+u^2}|$$

ou

$$Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{\operatorname{arc\,tg} u}.$$

Substituant dans cette dernière égalité $\frac{y_1}{x_1}$ au lieu de u, on obtient :

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Enfin, passant aux variables x, y, on obtient en définitive :

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

Exemple 2. On ne peut faire la substitution $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ dans l'équation

$$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5},$$

car le système d'équations servant à définir h et k est incompatible (le déterminant $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}$ des coefficients des variables étant nul).

On peut ramener cette équation à une équation à variables séparables en faisant la substitution :

$$2x+y=z.$$

On a alors $y'=z'-2$, et l'équation devient

$$z'-2=\frac{z-1}{2z+5}$$

ou

$$z'=\frac{5z+9}{2z+5}.$$

On en déduit

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\operatorname{Log}|5z+9|=x+C.$$

Comme $z=2x+y$, on trouve finalement la solution de l'équation donnée sous la forme

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\operatorname{Log}|10x+5y+9|=x+C$$

ou

$$10y-5x+7\operatorname{Log}|10x+5y+9|=C_1,$$

c'-à-d. sous forme implicite.

§ 7. Equations linéaires du premier ordre

Définition. On appelle *équation linéaire du premier ordre* une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle s'écrit

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x), \tag{1}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x données (ou des constantes).

Résolution de l'équation linéaire (1). Nous allons chercher la solution de l'équation (1) sous forme de produit de deux fonctions de x:

$$y=u(x)\,v(x). \tag{2}$$

On pourra prendre arbitrairement l'une de ces fonctions, l'autre sera définie alors par (1).

Dérivons les deux membres de l'égalité (2), on trouve:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

Substituant l'expression de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ obtenue dans l'équation (1), on aura

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q$$

ou

$$u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}=Q. \tag{3}$$

Choisissons la fonction v de sorte que l'on ait

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0. \tag{4}$$

Séparant les variables dans cette équation différentielle en v, on trouve:

$$\frac{dv}{v}=-P\,dx.$$

On obtient en intégrant

$$-\mathrm{Log}\,|\,C_1\,| + \mathrm{Log}\,|\,v\,| = -\int P\,dx$$

ou

$$v = C_1 e^{-\int P\,dx}.$$

Comme il nous suffit d'avoir une solution quelconque non nulle de l'équation (4), nous prendrons pour fonction $v(x)$:

$$v(x) = e^{\int P\,dx}, \tag{5}$$

où $\int P\,dx$ est une primitive quelconque. Il est évident que $v(x) \neq 0$.

Substituant la valeur trouvée de $v(x)$ dans l'équation (3), on obtient $\left(\text{ayant en vue que } \frac{dv}{dx} + Pv = 0\right)$:

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

d'où

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Substituant dans la formule (2), on obtient finalement :

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C\right]$$

ou

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + Cv(x). \tag{6}$$

R e m a r q u e. Il est évident que l'expression (6) ne change pas si l'on prend au lieu de la fonction $v(x)$ définie par (5) une fonction quelconque $v_1(x) = \overline{C}v(x)$. En effet, on obtient en substituant $v_1(x)$ au lieu de $v(x)$:

$$y = \overline{C}v(x)\int \frac{Q(x)}{\overline{C}v(x)}\,dx + CCv(x).$$

$\overline{C}$ disparaît du premier terme du second membre ; le produit $C\overline{C}$ du second terme est une constante arbitraire que l'on peut désigner simplement par C, et nous retrouvons l'expression (6). Si l'on pose $\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx = \varphi(x)$, l'équation (6) prend la forme

$$y = v(x)\,\varphi(x) + Cv(x). \tag{6'}$$

Il est évident qu'on a là l'intégrale générale, car on peut choisir C de manière que soit satisfaite la condition initiale:

$$y = y_0 \quad \text{lorsque} \quad x = x_0.$$

C est déterminé par l'équation

$$y_0 = v(x_0)\,\varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

Exemple. Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Solution. Posons

$$y = uv;$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

Substituant l'expression $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, on obtient:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3. \tag{7}$$

Pour la détermination de v, on obtient l'équation

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0,$$

c.-à-d.

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

d'où

$$\operatorname{Log}|v| = 2\operatorname{Log}|x+1|$$

ou

$$v = (x+1)^2.$$

Substituant l'expression de la fonction v dans l'équation (7), on obtient pour la détermination de u l'équation

$$(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

ou

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

d'où

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation donnée s'écrit

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

La famille obtenue est la solution générale. Quelle que soit la condition initiale (x_0, y_0) où $x_0 \neq -1$, on peut toujours choisir C de sorte que la solution particulière correspondante satisfasse à la condition initiale donnée. Ainsi, la solution particulière satisfaisant à la condition $y_0 = 3$ pour $x_0 = 0$ est définie comme suit:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2; \quad C = \frac{5}{2}.$$

Par conséquent, la solution particulière cherchée est

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Toutefois, si l'on prend la condition initiale (x_0, y_0) de sorte que $x_0 = -1$, on ne peut en déduire une solution particulière satisfaisant à cette condition. Ceci provient de ce que la fonction $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ est discontinue au point $x_0 = -1$ et les conditions du théorème d'existence de la solution ne sont pas observées.

Remarque. On rencontre souvent, dans les applications, les équations différentielles à coefficients constants

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \tag{8}$$

où a et b sont des constantes.

On peut résoudre cette équation à l'aide de la substitution (2) ou par une séparation des variables:

$$dy = (-ay+b)\,dx, \quad \frac{dy}{-ay+b} = dx, \quad -\frac{1}{a}\operatorname{Log}|-ay+b| = x + C_1,$$

$$\operatorname{Log}|-ay+b| = -(ax+C^*), \text{ où } C^* = aC_1,$$

$$-ay+b = e^{-(ax+C^*)}, \quad y = -\frac{1}{a}e^{-(ax+C^*)} + \frac{b}{a}$$

et finalement

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Cette expression dans laquelle $C = -\frac{1}{a}e^{-C^*}$ est la solution générale de l'équation (8).

§ 8. Equation de Bernoulli

Considérons une équation de la forme *)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \tag{1}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes) et $n \neq 0$, $n \neq 1$ (sinon on aurait une équation linéaire).

*) A cette équation conduit le problème sur le mouvement du corps si la résistance du milieu F dépend de la vitesse: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. L'équation du mouvement sera alors $m\frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$ ou $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m}v = -\frac{\lambda_2}{m}v^n$.

Cette équation, qui est appelée *équation de Bernoulli*, se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante.

Divisant tous les termes de l'équation par y^n, on obtient :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q. \tag{2}$$

Faisons ensuite la substitution :

$$z = y^{-n+1}.$$

Alors

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

On obtient en substituant dans l'équation (2) :

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,Pz=(-n+1)\,Q.$$

C'est une équation linéaire.

Calculant son intégrale générale et substituant à z son expression y^{-n+1}, on obtient l'intégrale générale de l'équation de Bernoulli.

Exemple. Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3. \tag{3}$$

Solution. Divisant tous les termes par y^3, on obtient :

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3. \tag{4}$$

Introduisons la nouvelle fonction

$$z = y^{-2};$$

on a alors

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}.$$

On obtient en substituant dans l'équation (4) :

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3. \tag{5}$$

C'est une équation linéaire.

Trouvons son intégrale générale :

$$z=uv\,;\quad \frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v.$$

Substituons dans l'équation (5) les expressions de z et de $\frac{dz}{dx}$:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-2xuv=-2x^3$$

ou

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2xv\right)+v\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Annulons l'expression entre parenthèses :

$$\frac{dv}{dx}-2xv=0\,;\quad \frac{dv}{v}=2x\,dx\,;$$

$$\operatorname{Log}|v|=x^2; \quad v=e^{x^2}.$$

On obtient pour définir u l'équation

$$e^{x^2}\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Séparons les variables :

$$du=-2e^{-x^2}x^3\,dx, \quad u=-2\int e^{-x^2}x^3\,dx+C.$$

On trouve en intégrant par parties

$$u=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C; \quad z=uv=x^2+1+Ce^{x^2}.$$

On a donc l'intégrale générale de l'équation donnée :

$$y^{-2}=x^2+1+Ce^{x^2} \text{ ou } y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}.$$

R e m a r q u e. Tout comme pour les équations linéaires, on démontre qu'on peut chercher la solution de l'équation de Bernoulli sous forme de produit de deux fonctions :

$$y = u(x)\,v(x),$$

où $v(x)$ est une fonction arbitraire non nulle satisfaisant à l'équation $v' + Pv = 0$.

§ 9. Equations aux différentielles totales

D é f i n i t i o n. L'équation

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

est appelée *équation aux différentielles totales* si $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions continues dérivables telles que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2}$$

les dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ étant continues dans un certain domaine.

I n t é g r a t i o n d e s é q u a t i o n s a u x d i f f é r e n t i e l l e s t o t a l e s. Montrons que si le premier membre de l'équation (1) est une différentielle totale, la condition (2) est observée, et inversement, si la condition (2) est observée, le premier membre de l'équation (1) est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c.-à-d. que l'équation (1) est de la forme

$$du(x, y) = 0 \tag{3}$$

dont l'intégrale générale est $u(x, y) = C$.

Supposons d'abord que le premier membre de l'équation (1) soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c.-à-d.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

alors

$$M = \frac{\partial u}{\partial x};\quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Dérivant la première relation par rapport à y et la seconde par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Supposant que les dérivées secondes sont continues, on a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

c.-à-d. que l'égalité (2) est une condition n é c e s s a i r e pour que le premier membre de l'équation (1) soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$. Montrons que cette condition est aussi s u f f i s a n t e, c.-à-d. que si les égalités (2) ont lieu, le premier membre de l'équation (1) est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$.

De la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

on déduit :

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

où x_0 est l'abscisse d'un point arbitraire dans le domaine d'existence de la solution.

Intégrant par rapport à x, nous supposons y constant, et, par conséquent, la constante d'intégration est remplacée ici par une fonction arbitraire de y. Choisissons la fonction $\varphi(y)$ de telle sorte que soit observée la seconde relation (4). A cet effet, dérivons *)

*) L'intégrale $\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx$ dépend de y. Pour trouver la dérivée de cette intégrale par rapport à y, il faut dériver par rapport à y la fonction sous le signe somme : $\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx$. Ceci résulte du théorème de Leibniz sur la dérivation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre (voir § 10, ch. XI).

les deux membres de la dernière égalité par rapport à y et égalons le résultat à $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\, dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Mais comme $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, on peut écrire:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + \varphi'(y) = N, \text{ c.-à-d. } N(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ou

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Par conséquent,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

ou

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

Par conséquent, la fonction $u(x, y)$ sera de la forme

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

$P(x_0, y_0)$ représente ici un point au voisinage duquel existe la solution de l'équation différentielle (1).

Egalant cette expression à une constante arbitraire C, on obtient l'intégrale générale de l'équation (1):

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy = C. \tag{5}$$

Exemple. Soit l'équation

$$\frac{2x}{y^3}\, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$$

Assurons-nous que c'est une différentielle totale.

Désignons

$$M = \frac{2x}{y^3}; \qquad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

La condition (2) est observée pour $y \neq 0$. Le premier membre de l'équation donnée est donc la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$. Trouvons cette fonction.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$, on a

$$u=\int \frac{2x}{y^3}\,dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction de y qu'il faut déterminer.

Dérivons cette relation par rapport à y et prenons en considération que

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

On trouve

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

par conséquent,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}; \qquad \varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1,$$

$$u(x, y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

§ 10. Facteur intégrant

Supposons que le premier membre de l'équation

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{1}$$

ne soit pas une différentielle totale. Il est parfois possible de choisir une fonction $\mu(x, y)$ telle que si l'on multiplie le premier membre de l'équation proposée par cette fonction, ce premier membre devient une différentielle totale. La solution générale de l'équation ainsi obtenue coïncide avec la solution générale de l'équation proposée; la fonction $\mu(x, y)$ est dite un *facteur intégrant* de l'équation (1).

Pour trouver un facteur intégrant μ, on procède comme suit: multiplions les deux membres de l'équation donnée par le facteur intégrant, encore inconnu, μ:

$$\mu M\,dx+\mu N\,dy=0.$$

Pour que cette dernière équation soit une équation aux différentielles totales, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

c.-à-d.

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x};$$

ou encore

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

On obtient en faisant le quotient des deux membres de cette dernière équation par μ :

$$M \frac{\partial \operatorname{Log} \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \operatorname{Log} \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Il est évident que toute fonction $\mu(x, y)$ satisfaisant à cette dernière équation est un facteur intégrant de l'équation (1). L'équation (2) est une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue μ dépendant de deux variables x et y. On démontre que, dans des conditions déterminées, elle possède une infinité de solutions et il en résulte que l'équation (1) a un facteur intégrant. Mais dans le cas général, il est plus difficile de déterminer $\mu(x, y)$ dans (2) que d'intégrer l'équation proposée (1). C'est seulement dans des cas particuliers que l'on arrive à déterminer la fonction $\mu(x, y)$.

Supposons, par exemple, que l'équation (1) admette un facteur intégrant dépendant seulement de y. Alors

$$\frac{\partial \operatorname{Log} \mu}{\partial x} = 0$$

et on obtient pour μ une équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d \operatorname{Log} \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

d'où l'on détermine (par une quadrature) $\operatorname{Log} \mu$ et donc μ. Il est évident que l'on ne peut procéder ainsi que si l'expression $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ne dépend pas de x.

D'une manière analogue, si l'expression $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ ne dépend pas de y mais dépend seulement de x, on trouve facilement le facteur intégrant qui dépend seulement de x.

Exemple. Résoudre l'équation

$$(y + xy^2)\, dx - x\, dy = 0.$$

Solution. Ici $M = y + xy^2$; $N = -x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Il en résulte que le premier membre de l'équation n'est pas une différentielle totale. Voyons si cette équation admet un facteur intégrant dépendant seulement de y. Remarquant que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y},$$

on conclut qu'il en est bien ainsi. Trouvons-le :

$$\frac{d\,\mathrm{Log}\,\mu}{dy}=-\frac{2}{y},$$

d'où

$$\mathrm{Log}\,\mu=-2\,\mathrm{Log}\,y, \quad \text{soit } \mu=\frac{1}{y^2}.$$

On obtient, après multiplication de tous les termes de l'équation proposée par le facteur intégrant μ, l'équation

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$$

aux différentielles totales $\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right)$. Résolvant cette équation, on trouve son intégrale générale :

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0$$

ou

$$y=-\frac{2x}{x^2+2C}.$$

§ 11. Enveloppe d'une famille de courbes

Soit une équation de la forme

$$\Phi\,(x,\ y,\ C)=0, \tag{1}$$

où x et y sont les coordonnées cartésiennes variables et C un paramètre susceptible de prendre diverses valeurs fixes.

Pour chaque valeur donnée du paramètre C, l'équation (1) définit une certaine courbe dans le plan Oxy. Donnant à C toutes les valeurs possibles, nous obtenons une famille de courbes dépendant d'un paramètre. Par conséquent, l'équation (1) est l'équation d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre (elle contient un seul paramètre arbitraire).

Définition. On appelle *enveloppe* L d'une famille de courbes à un paramètre une courbe tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille (fig. 256).

Exemple 1. Considérons la famille de courbes

$$(x-C)^2+y^2=R^2,$$

où R est une constante et C un paramètre.

C'est l'équation d'une famille de cercles de rayon R centrés sur l'axe Ox. Il est évident que cette famille admet pour enveloppe les droites $y = R$, $y = -R$ (fig. 257).

Equation de l'enveloppe d'une famille de courbes. Soit la famille de courbes

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

dépendant d'un paramètre C.

Supposons que cette famille ait une enveloppe dont l'équation puisse être mise sous la forme $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction

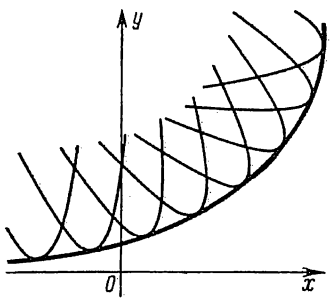


Fig. 256

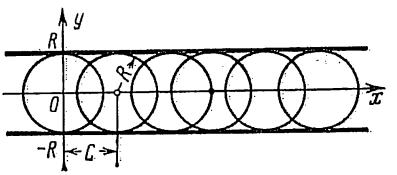


Fig. 257

continue dérivable. Considérons un point $M(x, y)$ de l'enveloppe. Ce point appartient aussi à une certaine courbe de la famille (1). Il correspond à cette courbe une valeur déterminée du paramètre C qui, pour (x, y) donnés, est définie par l'équation (1) : $C = C(x, y)$. Par conséquent, on a pour tous les points de l'enveloppe l'égalité

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \tag{2}$$

Supposons que $C(x, y)$ soit une fonction dérivable non constante dans aucun intervalle des valeurs de x, y considérées. Trouvons à partir de l'équation (2) de l'enveloppe le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe au point $M(x, y)$. Dérivons l'égalité (2) par rapport à x, en considérant y comme fonction de x :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right) y' = 0$$

ou

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0. \tag{3}$$

On déduit ensuite le coefficient angulaire de la tangente au point $M(x, y)$ à la courbe de la famille (1) de l'égalité

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \tag{4}$$

(C est constant sur la courbe donnée).

Nous supposerons $\Phi'_y \neq 0$, sinon nous prendrions x comme fonction et y comme variable. Etant donné que le coefficient angulaire k de l'enveloppe est égal à celui de la courbe de la famille, on déduit de (3) et (4):

$$\Phi'_C \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0$$

Mais comme pour l'enveloppe $C(x, y) \neq \text{const}$,

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

et on a donc pour les points de cette dernière

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0. \tag{5}$$

Par conséquent, on détermine l'enveloppe par les deux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Inversement, si, éliminant C de ces équations, on obtient $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est une fonction dérivable, et $C \neq \text{const}$ sur cette courbe, alors $y = \varphi(x)$ est l'équation de l'enveloppe.

Remarque 1. Si une certaine fonction $y = \varphi(x)$ représente le lieu géométrique des *points singuliers* de la famille (1), c.-à-d. de points tels que $\Phi'_x = 0$ et $\Phi'_y = 0$, les coordonnées de ces points vérifient également les équations (6).

En effet, on peut exprimer les coordonnées des points singuliers en fonction du paramètre C qui entre dans l'équation (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \tag{7}$$

Si l'on substitue ces expressions dans l'équation (1), on obtient une identité en C:

$$\Phi[\lambda(C), \mu(C), C] = 0.$$

Dérivons cette identité par rapport à C, on obtient:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0;$$

comme on a, quel que soit le point singulier, les égalités $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, il en résulte qu'on a aussi pour ces points $\Phi'_C = 0$.

Nous venons donc de démontrer que les coordonnées des points singuliers vérifient les équations (6).

Ainsi, les équations (6) définissent soit l'enveloppe, soit le lieu géométrique des points singuliers des courbes de la famille (1), soit une combinaison de l'une et de l'autre. Par conséquent, ayant obtenu une courbe satisfaisant aux équations (6), il importe de faire une étude spéciale pour déterminer si la courbe obtenue est l'enveloppe ou bien un lieu de points singuliers.

Exemple 2. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles dépendant d'un paramètre C

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Solution. On obtient en dérivant l'équation de la famille par rapport à C:

$$2(x - C) = 0.$$

Eliminons C de ces deux équations, on obtient:

$$y^2 - R^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm R.$$

Il résulte des considérations géométriques que le couple de droites obtenues est bien l'enveloppe (et non pas un lieu de points singuliers, étant donné que les cercles de la famille n'ont pas de points singuliers).

Exemple 3. Trouver l'enveloppe de la famille de droites:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \tag{a}$$

où α est le paramètre.

Solution. On trouve en dérivant par rapport à α l'équation de la famille

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \tag{b}$$

Pour éliminer le paramètre α des équations (a) et (b), multiplions la première par $\cos \alpha$, la seconde par $\sin \alpha$ et retranchons la seconde de la première; on obtient:

$$x = p \cos \alpha.$$

On trouve en substituant cette expression dans l'égalité (b):

$$y = p \sin \alpha.$$

Elevons les deux membres des équations précédentes au carré et ajoutons-les; on a:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

C'est l'équation d'un cercle. Ce cercle est l'enveloppe de la famille de droites (et non pas un lieu de points singuliers, car les droites n'ont pas de singularité) (fig. 258).

Exemple 4. Trouver l'enveloppe des trajectoires des projectiles lancés par un canon à la vitesse v_0 sous différents angles. On suppose que les projectiles sont lancés de l'origine des coordonnées et que leurs trajectoires se trouvent dans le plan Oxy (on néglige la résistance de l'air).

Solution. Trouvons d'abord l'équation de la rajectoire d'un projectile lancé sous l'angle α dans le sens positif de l'axe Ox. Le mouvement du projectile est la superposition de deux mouvements: d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 dans la direction du lancement et d'un movement de chute sous

l'action de la pesanteur. La position du projectile M sera donc définie à chaque instant t par les égalités (fig. 259) :

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$
$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Ce sont les équations paramétriq es de la trajectoire (le paramètre est le temps). Eliminant t, on trouve l'équation de la trajectoire sous la forme :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

enfin, introduisant les notations $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, on obtient :

$$y = kx - ax^2 (1 + k^2). \tag{8}$$

C'est l'équation de paraboles passant par l'origine, d'axes verticaux et de branches tournées vers le bas. On obtient différentes trajectoires en faisant varier k.

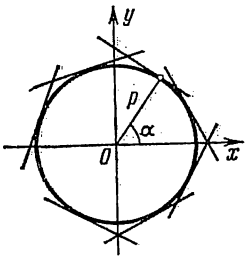


Fig. 258

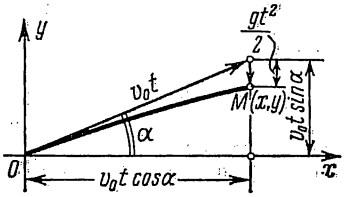


Fig. 259

L'équation (8) est donc l'équation d'une famille de paraboles à un paramètre, qui sont les trajectoires des projectiles lancés sous différents angles α et avec une vitesse initiale donnée v_0 (fig. 260).

Cherchons l'enveloppe de cette famille de paraboles.

Dérivons les deux membres de l'équation (8) par rapport à k, on obtient :

$$x - 2akx^2 = 0. \tag{9}$$

Eliminons k des équations (8) et (9), on obtient :

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

C'est l'équation d'une parabole de sommet au point $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ et dont l'axe est Oy. Elle n'est pas un lieu de points singuliers (les paraboles (8) n'ont pas de points singuliers). Ainsi, la parabole

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

est l'enveloppe de la famille de trajectoires. On l'appelle la p a r a b o l e d e s û r e t é, car la région se trouvant en dehors de cette parabole est hors de portée des projectiles lancés avec la vitesse initiale v_0.

Exemple 5. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles semi-cubiques

$$y^3 - (x - C)^2 = 0.$$

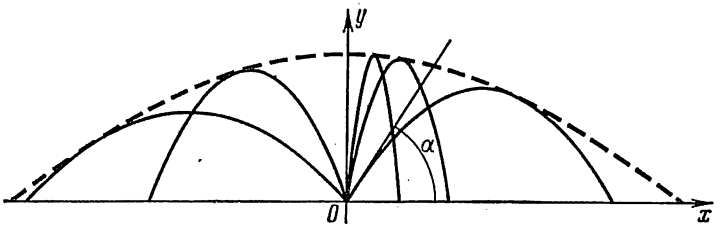


Fig. 260

Solution. Dérivons l'équation donnée par rapport au paramètre C:

$$2(x - C) = 0.$$

On obtient en éliminant le paramètre C des deux équations

$$y = 0.$$

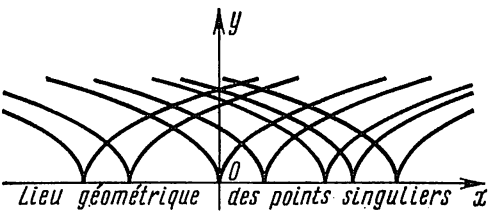


Fig. 261

L'axe Ox est un lieu géométrique des points singuliers (des points de rebroussement de première espèce) (fig. 261). En effet cherchons les points singuliers de la courbe

$$y^3 - (x - C)^2 = 0,$$

C étant fixé. On trouve en dérivant par rapport à x et y:

$$F'_x = -2(x - C) = 0;$$
$$F'_y = 3y^2 = 0.$$

Résolvant les trois dernières équations on trouve les coordonnées du point singulier: $x = C$, $y = 0$; par conséquent chaque courbe de la famille a un point singulier sur l'axe Ox.

Les points singuliers décrivent l'axe Ox tout entier lorsque le paramètre C varie d'une manière continue.

Exemple 6. Trouver l'enveloppe et le lieu géométrique des points singuliers de la famille

$$(y - C)^2 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0. \qquad (10)$$

Solution. Dérivant par rapport à C les deux membres de l'équation (10), on trouve :

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}3(x-C)^2=0$$

ou

$$y-C-(x-C)^2=0. \tag{11}$$

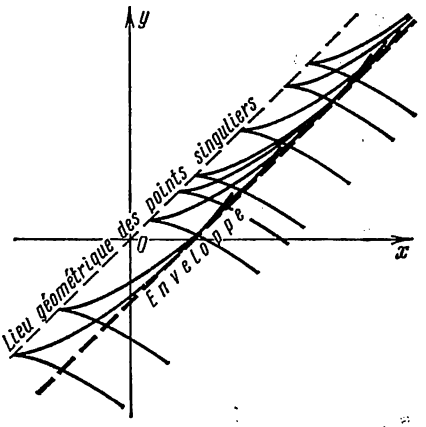


Fig. 262

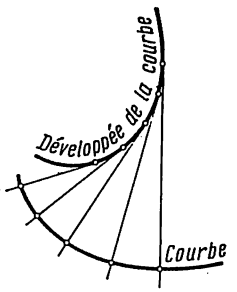


Fig. 263

Eliminons maintenant le paramètre C de l'égalité obtenue (11) et de l'équation (10) de la famille. Substituons l'expression

$$y-C=(x-C)^2$$

dans l'équation de la famille, on obtient :

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0$$

ou

$$(x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0;$$

on obtient ainsi deux valeurs de C, auxquelles correspondent deux solutions du problème proposé.

Première solution :

$$C=x;$$

on déduit donc de l'égalité (11) :

$$y-x-(x-x)^2=0$$

ou

$$y=x.$$

Deuxième solution :

$$C=x-\frac{2}{3};$$

on déduit donc de l'égalité (11)

$$y-x+\frac{2}{3}-\left[x-x+\frac{2}{3}\right]^2=0$$

ou

$$y=x-\frac{2}{9}.$$

Nous avons obtenu deux droites: $y = x$ et $y = x - \frac{2}{9}$. La premiere droite est le lieu des points singuliers et la seconde l'enveloppe (fig. 262).

Remarque 2. Nous avons démontré au § 7, ch. VI que les normales à une courbe étaient en même temps les tangentes à la développée de cette courbe. Par conséquent, la famille des normales à une courbe donnée est en même temps la famille des tangentes à sa développée. On voit donc que la développée d'une courbe est l'enveloppe de la famille des normales à cette courbe (fig. 263).

Cette remarque permet d'indiquer encore une méthode pour la recherche de la développée: on trouve l'équation de la développée d'une courbe en définissant préalablement la famille des normales à cette courbe, puis en cherchant l'enveloppe de cette famille.

§ 12. Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre

Supposons que l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

ait pour intégrale générale

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{2}$$

Supposons que la famille de courbes intégrales de l'équation (2) ait une enveloppe. Montrons que cette enveloppe est également une courbe intégrale de l'équation différentielle (1).

En effet, l'enveloppe est tangente en chacun de ses points à une certaine courbe de la famille, c'est-à-dire qu'elle a en ce point une tangente commune avec la courbe. Par conséquent, en chaque point de l'enveloppe, les quantités x, y, y' sont les mêmes pour l'enveloppe et pour la courbe de la famille.

Or pour la courbe de la famille les quantités x, y, y' vérifient l'équation (1). Il en résulte que l'abscisse, l'ordonnée et le coefficient angulaire de chaque point de l'enveloppe vérifient aussi cette même équation, ce qui signifie que l'enveloppe est une courbe intégrale et que son équation est une solution de l'équation différentielle donnée.

Mais l'enveloppe n'étant pas en général une courbe de la famille, son équation ne peut être déduite de l'intégrale générale (2) en particularisant C. On appelle *solution singulière* d'une équation différentielle toute solution non déduite de l'intégrale générale en particularisant C, et ayant pour graphe l'enveloppe de la famille de courbes intégrales contenues dans la solution générale.

Supposons connue l'intégrale générale

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

éliminant C de cette équation et de l'équation $\Phi'_C(x, y, C) = 0$, on obtient une équation $\psi(x, y) = 0$. Si cette fonction vérifie l'équation différentielle (mais n'appartient pas à la famille (2)), c'est une *intégrale singulière*.

Remarquons qu'il passe au moins deux courbes intégrales par chaque point de l'intégrale singulière, c.-à-d. que l'unicité de la solution est violée en chaque point d'une intégrale singulière.

Notons que le point dans lequel est violée l'unicité de la solution d'une équation différentielle, c'est-à-dire le point par lequel passent au moins deux courbes intégrales, s'appelle *point singulier* *). Par conséquent, toute solution singulière est constituée de points singuliers.

Exemple. Trouver la solution singulière de l'équation

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \qquad (*)$$

Solution. Trouvons son intégrale générale. Résolvons l'équation par rapport à y' :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

On trouve en séparant les variables

$$\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

On déduit l' ntégrale générale par intégration:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

On voit que la famille de courbes intégrales est la famille de cercles de rayon R centrés sur l'axe des abscisses. L'enveloppe de cette famille de cercles est donnée par les deux droites $y = \pm R$.

Les fonctions $y = \pm R$ vérifient l'équation différentielle (*). Elles représentent les intégrales singulières.

§ 13. Equation de Clairaut

Considérons l'équation suivante

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (1)$$

---

*) Les points frontières du domaine d'existence de la solution sont également nommés *points singuliers*. Tout point intérieur du domaine par lequel passe une seule et unique courbe intégrale de l'équation différentielle s'appelle *point ordinaire*.

appelée *équation de Clairaut*. Elle s'intègre en introduisant un paramètre auxiliaire. Posons, en effet, $\frac{dy}{dx} = p$; l'équation (1) prend la forme

$$y = xp + \psi(p). \tag{1'}$$

Dérivons tous les termes de cette dernière équation par rapport à x, ayant en vue que $p = \frac{dy}{dx}$ est fonction de x:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ou

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Annulons séparément chaque facteur, on obtient :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{2}$$

et

$$x + \psi'(p) = 0. \tag{3}$$

1) L'intégration de (2) donne $p = C$ (C = const). Substituant cette valeur de p dans l'équation (1'), on trouve son intégrale générale

$$y = xC + \psi(C) \tag{4}$$

qui représente, du point de vue géométrique, une famille de droites.

2) Tirons p de l'équation (3) en tant que fonction de x et substituons-la dans l'équation (1') ; on trouve

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \tag{1''}$$

qui, comme nous allons voir, est une solution de l'équation (1).

En effet, on trouve en vertu de (3) :

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = p.$$

Par conséquent, on obtient une identité lorsqu'on substitue la fonction (1'') dans l'équation (1) :

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

La solution (1'') ne peut pas être obtenue à partir de l'intégrale générale (4) en particularisant C. C'est une solution singulière ; on l'obtient en éliminant le paramètre p des équations

$$\left.\begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ou, ce qui revient au même, en éliminant C dans les équations

$$y = xC + \psi(C),$$
$$x + \psi'_C(C) = 0.$$

On voit donc que la solution singulière de l'équation de Clairaut est l'enveloppe de la famille de droites définies par l'intégrale générale (4).

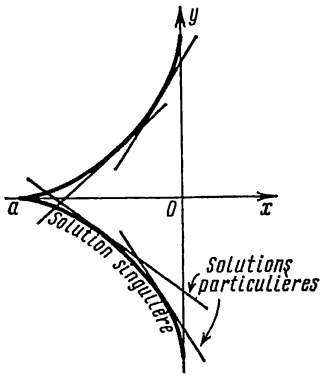


Fig. 264

Exemple. Trouver les intégrales générale et singulière de l'équation

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Solution. On obtient l'intégrale générale en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par C :

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Pour obtenir la solution singulière, dérivons cette dernière équation par rapport à C :

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0.$$

On obtient la solution singulière (l'enveloppe) sous forme paramétrique (C étant le paramètre) :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \dfrac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Eliminant le paramètre C on trouve la dépendance entre x et y. Elevons chacune de ces équations séparément à la puissance $^2/_3$ et ajoutons membre à membre, on obtient la solution singulière sous la forme

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

C'est une astroïde. Toutefois l'enveloppe de la famille de droites (et donc la solution singulière) n'est pas représentée par l'astroïde tout entière mais par sa moitié de gauche (car les équations paramétriques de l'enveloppe montrent que $x \leqslant 0$) (fig. 264).

§ 14. Equation de Lagrange

On appelle ainsi une équation de la forme

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

où φ et ψ sont des fonctions données de $\frac{dy}{dx}$.

Cette équation est linéaire par rapport à x et y. L'équation de Clairaut, examinée au paragraphe précédent, est un cas particulier de l'équation de Lagrange lorsque $\varphi(y') \equiv y'$. Tout comme l'équation de Clairaut, l'équation de Lagrange s'intègre en introduisant un paramètre auxiliaire p. Posons

$$y' = p;$$

l'équation proposée prend alors la forme

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{1'}$$

On obtient en dérivant par rapport à x:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

ou

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{1''}$$

On trouve d'emblée certaines solutions de cette équation, car elle devient une identité pour toute valeur constante $p = p_0$ vérifiant la condition

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

En effet, lorsque p est constant, on a $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ et les deux membres de l'équation (1″) s'annulent.

La solution correspondant à chaque valeur de $p = p_0$, c.-à-d. $\frac{dy}{dx} = p_0$, est une fonction l i n é a i r e de x (étant donné que la dérivée $\frac{dy}{dx}$ n'est constante que pour les fonctions linéaires). Pour trouver cette fonction, il suffit de substituer dans l'égalité (1′) la valeur $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Si cette solution ne peut être déduite de la solution générale en particularisant la constante arbitraire, c'est une s o l u t i o n s i n g u l i è r e.

Trouvons à présent la s o l u t i o n g é n é r a l e. Ecrivons à cet effet l'équation (1″) sous la forme

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

et considérons x comme fonction de p. L'équation obtenue est alors une équation différentielle linéaire par rapport à la fonction $x(p)$.

On trouve en la résolvant

$$x = \omega(p, C). \tag{2}$$

Eliminant le paramètre p des équations (1′) et (2), on obtient l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Exemple. Soit l'équation

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{I}$$

Posons $y' = p$, on obtient

$$y = xp^2 + p^2. \tag{I'}$$

Dérivons par rapport à x, on obtient:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}. \tag{I''}$$

Trouvons les solutions singulières. Etant donné que $p = p$ lorsque $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$ on aura pour solutions les fonctions (voir (I′)):

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \quad \text{c.-à-d. } y = 0$$

et

$$y = x + 1.$$

On saura si ces fonctions sont des solutions particulières ou singulières après avoir trouvé l'intégrale générale. Pour trouver l'intégrale générale écrivons l'équation (I″) sous la forme

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2}{1-p} = \frac{2}{1-p} \quad \ldots .$$

et considérons x comme fonction de la variable indépendante p. Intégrons l'équation linéaire (relativement à x) obtenue, on trouve:

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \tag{II}$$

Eliminant p des équations (I′) et (II) on obtient l'intégrale générale:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

L'équation proposée a pour intégrale singulière:

$$y = 0,$$

étant donné que cette solution ne résulte pas de la solution générale en particularisant C.

Quant à la fonction $y = x + 1$, elle n'est pas une solution singulière, mais une solution particulière; elle se déduit de la solution générale en posant $C = 0$.

§ 15. Trajectoires orthogonales et isogonales

Considérons une famille de courbes à un paramètre

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1}$$

On appelle *trajectoires isogonales* les courbes coupant toutes les courbes de la famille donnée (1) sous un angle constant. Si l'on a un angle droit, ces courbes sont alors des *trajectoires orthogonales.*

Trajectoires orthogonales. Cherchons l'équation des trajectoires orthogonales. Ecrivons l'équation différentielle de la famille de courbes donnée, en éliminant le paramètre C des équations

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

et

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Soit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1')$$

cette équation différentielle. $\frac{dy}{dx}$ est ici la pente de la tangente au point $M(x, y)$ à la courbe correspondante de la famille. Etant donné que la trajectoire orthogonale passant par le point $M(x, y)$ est perpendiculaire à la courbe correspondante, sa pente $\frac{dy_T}{dx}$ est liée à $\frac{dy}{dx}$ par la relation (fig. 265)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \qquad (2)$$

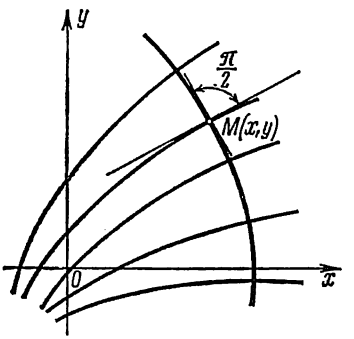


Fig. 265

Substituant cette expression dans l'équation (1') et omettant l'indice T, on obtient une relation entre les coordonnées d'un point arbitraire (x, y) et la pente de la trajectoire orthogonale en ce point, c.-à-d. l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \qquad (3)$$

L'intégrale générale de cette équation

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

représente la famille de trajectoires orthogonales.

Les trajectoires orthogonales se rencontrent, par exemple, lorsqu'on étudie l'écoulement plan d'un fluide.

Considérons le mouvement plan d'un fluide tel que le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}(x, y)$ du courant soit défini en chaque point du plan Oxy. Si ce vecteur ne dépend que de la position du point et non du temps, on dit que le mouvement est stationnaire. Nous allons considérer un tel mouvement. En outre, nous supposerons qu'il existe un potentiel de vitesses, c.-à-d. une fonction $u(x, y)$ telle que les projections du vecteur $\boldsymbol{v}(x, y)$ sur les axes de coordonnées $v_x(x, y)$ et $v_y(x, y)$ soient les dérivées partielles de cette fonction par rapport à x et y :

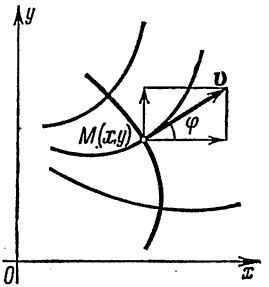


Fig. 266

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \tag{4}$$

Les courbes de la famille

$$u(x, y) = C \tag{5}$$

sont appelées **lignes de niveau** ou **lignes équipotentielles**.

Les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec le vecteur $\boldsymbol{v}(x,y)$ sont appelées **lignes de courant**; elles matérialisent les trajectoires des particules en mouvement.

Montrons que les lignes de courant sont les trajectoires orthogonales de la famille de lignes équipotentielles (fig. 266).

Soit φ l'angle formé par le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ et l'axe Ox. On a, en vertu des relations (4),

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |\boldsymbol{v}| \cos\varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |\boldsymbol{v}| \sin\varphi;$$

d'où l'on déduit la pente de la tangente à la ligne de courant

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \tag{6}$$

On obtient la pente de la tangente à la ligne équipotentielle en dérivant la relation (5) par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}. \tag{7}$$

Par conséquent, la pente de la tangente à la ligne équipotentielle est l'inverse changé de signe de la pente de la tangente à la ligne de courant.

Il en résulte que les lignes équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.

Dans le cas d'un champ électrique ou d'un champ magnétique, les trajectoires orthogonales de la famille de lignes équipotentielles sont les lignes de force du champ.

Exemple 1. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles

$$y = Cx^2.$$

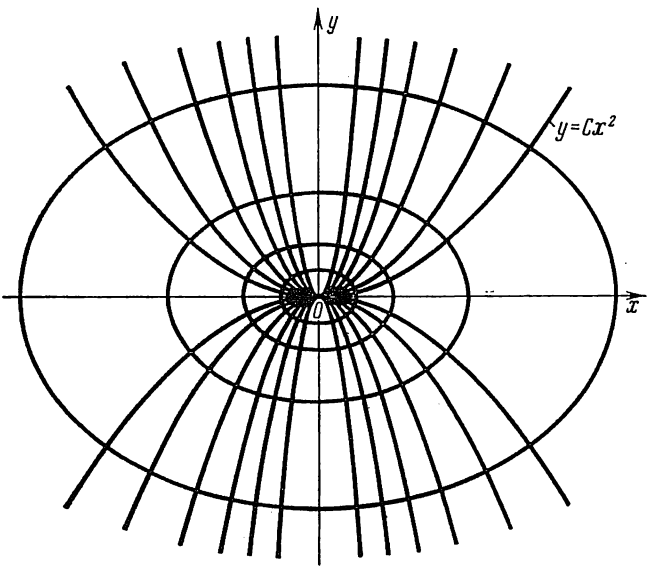


Fig. 267

Solution. Ecrivons l'équation différentielle de la famille

$$y' = 2Cx.$$

On obtient en éliminant C:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Remplaçant dans cette égalité y' par $-\frac{1}{y'}$, on obtient l'équation différentielle de la famille de trajectoires orthogonales

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

ou

$$y\,dy = -\frac{x\,dx}{2}.$$

Son intégrale générale est

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=C^2.$$

Par conséquent, les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles donnée forment une famille d'ellipses de demi-axes $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ (fig. 267).

Trajectoires isogonales. Supposons que les trajectoires coupent les courbes d'une famille donnée sous l'angle α. Posons $\operatorname{tg}\alpha = k$.

La pente $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi$ (fig. 268) de la tangente à la courbe de la famille et la pente $\frac{dy_T}{dx}=\operatorname{tg}\psi$ de la tangente à la trajectoire isogonale sont reliées par la relation

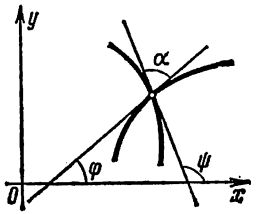


Fig. 268

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\psi-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi},$$

c.-à-d. que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}. \qquad (2')$$

Substituant cette expression dans l'équation (1′) et omettant l'indice T, on obtient l'équation différentielle des trajectoires isogonales.

Exemple 2. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de droites

$$y = Cx. \qquad (8)$$

On suppose que ces droites sont coupées sous l'angle α, et on posera $\operatorname{tg}\alpha = k$.

Solution. Ecrivons l'équation différentielle de la famille de droites. Dérivons l'équation (8) par rapport à x:

$$\frac{dy}{dx}=C.$$

Par ailleurs, on déduit de la même équation

$$C=\frac{y}{x}.$$

L'équation de la famille de droites est donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

On obtient l'équation différentielle des trajectoires isogonales en se servant de la relation (2')

$$\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}=\frac{y}{x}.$$

On a donc, en omettant l'indice T :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}}.$$

On obtient l'intégrale générale en intégrant cette équation homogène :

$$\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\operatorname{Log}C, \tag{9}$$

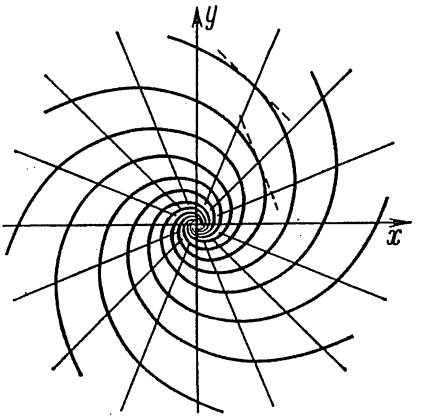


Fig. 269

telle est la famille de trajectoires isogonales. Pour voir quelles sont les courbes de cette famille, passons en coordonnées polaires :

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi;\quad \sqrt{x^2+y^2}=\rho.$$

On obtient en substituant ces expressions dans (9)

$$\operatorname{Log}\rho=\frac{1}{k}\varphi+\operatorname{Log}C$$

ou

$$\rho=Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

On voit que la famille de trajectoires isogonales est composée de spirales logarithmiques (fig. 269).

§ 16. Equations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales)

Comme nous l'avons indiqué plus haut (voir § 2), on peut écrire symboliquement une équation différentielle d'ordre n sous la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

ou encore, si elle se résout par rapport à la dérivée d'ordre n,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1'}$$

Dans le présent chapitre, nous ne considérerons que des équations résolubles par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé. On a pour ces équations un théorème d'existence et d'unicité de la solution analogue à celui des équations du premier ordre.

Théorème. *Si dans l'équation*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

la fonction $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *et ses dérivées partielles par rapport à* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *sont continues dans un certain domaine contenant les valeurs* $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, *il existe une solution et une seule* $y = y(x)$ *de l'équation vérifiant les conditions*

$$\left.\begin{array}{l} y_{x=x_0} = y_0, \\ y'_{x=x_0} = y'_0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\} \tag{2}$$

qui sont appelées les conditions initiales. La démonstration de ce théorème sort du cadre de ce livre.

Si l'on considère une équation du second ordre $y'' = f(x, y, y')$, les conditions initiales de la solution pour $x = x_0$ seront

$$y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

où x_0, y_0, y'_0 sont des nombres donnés. Le sens géométrique de ces conditions est le suivant : il passe par le point donné du plan (x_0, y_0) une seule courbe dont la pente de la tangente en ce point est y'_0. Il en résulte que si l'on se donne différentes valeurs de y'_0, le point x_0, y_0 étant fixe, on obtient autant de courbes intégrales de pentes différentes passant par le point donné.

Introduisons maintenant la notion de solution générale d'une équation du n-ième ordre.

Définition. On appelle *solution générale* d'une équation différentielle du n-ième ordre une fonction

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

dépendant de n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$, telle que:

a) elle vérifie l'équation quelles que soient les valeurs des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

b) les conditions initiales étant données:

$$y_{x=x_0} = y_0;$$
$$y'_{x=x_0} = y'_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

on peut choisir les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de sorte que la fonction $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ vérifie ces conditions (on suppose que les valeurs initiales $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ appartiennent au domaine d'existence de la solution).

Une relation de la forme $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, définissant la solution générale implicitement, est appelée l'*intégrale générale* de l'équation différentielle proposée.

Toute fonction se déduisant de la solution générale, en concrétisant les valeurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$, est une *solution particulière*. La courbe représentative d'une solution particulière est une *courbe intégrale* de l'équation différentielle donnée.

Résoudre (intégrer) une équation différentielle d'ordre n, c'est:

1) trouver sa solution générale (si les conditions initiales ne sont pas données) ou

2) trouver la solution particulière de l'équation satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).

Nous donnons dans les paragraphes suivants des méthodes de résolution de différentes équations du n-ième ordre.

§ 17. Equation de la forme $y^{(n)} = f(x)$

L'équation la plus simple du n-ième ordre est de la forme

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1}$$

Trouvons son intégrale générale.

Intégrons par rapport à x les deux membres de l'équation. On obtient, en prenant en considération que $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

où x_0 est une valeur arbitraire fixe de x et C_1 une constante d'intégration.

Intégrons encore une fois :

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \right) dx + C_1 (x - x_0) + C_2.$$

Continuant ainsi, on obtient (après n intégrations) l'expression de l'intégrale générale

$$y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \ldots dx + \frac{C_1 (x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0; \ldots; \quad y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

il suffit de poser

$$C_n = y_0, \; C_{n-1} = y'_0, \ldots, \; C_1 = y_0^{(n-1)}.$$

Exemple 1. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$y'' = \sin(kx)$$

et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1.$$

Solution.

$$y' = \int_0^x \sin kx\,dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k} \right) dx + \int_0^x C_1\,dx + C_2$$

ou

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Telle est l'intégrale générale. Pour trouver la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données, il suffit de déterminer les valeurs correspondantes de C_1 et C_2.

On déduit de la condition $y_{x=0} = 0$ $C_2 = 0$.

On déduit de la condition $y'_{x=0} = 1$ $C_1 = 1$.

Par conséquent, la solution particulière cherchée s'écrit

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x \left(\frac{1}{k} + 1 \right).$$

On rencontre des équations différentielles de ce genre en théorie de la flexion des poutres.

Exemple 2. Considérons une poutre prismatique fléchissant sous l'action de forces extérieures, aussi bien réparties que concentrées. Menons l'axe Ox horizontalement, confondu avec l'axe de la poutre avant sa déformation, et Oy verticalement vers le bas (fig. 270).

Toute force agissant sur la poutre (par exemple, la charge, la réaction des appuis) a un moment par rapport à une section transversale de la poutre qui est égal au produit de la force par la distance entre le point d'application de la force et la section considérée. La somme $M(x)$ des moments de toutes les forces appliquées d'un même côté de la section d'abscisse x est appelée moment fléchissant de la poutre par rapport à la section donnée. On démontre dans les cours de résistance des matériaux que le moment fléchissant d'une poutre est

$$\frac{EJ}{R},$$

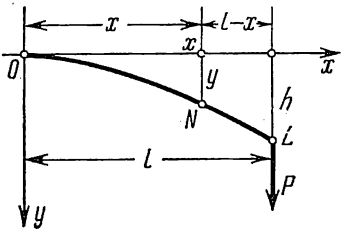


Fig. 270

où E est le module d'élasticité, qui dépend du matériau, J le moment d'inertie de la section transversale de la poutre par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de gravité de cette section, R le rayon de courbure de l'axe de la poutre courbée, dont l'expression est donnée par la formule (§ 6, chap. VI)

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Par conséquent, l'équation différentielle de l'axe courbe de la poutre s'écrit

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \tag{2}$$

Si l'on admet que les déformations sont petites et que les angles entre les tangentes à l'axe de la poutre et l'axe Ox sont petits, on pourra négliger la quantité y'^2 qui est le carré de la petite quantité y' et poser

$$R = \frac{1}{y''}.$$

L'équation différentielle de la poutre fléchie devient alors

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}. \tag{2'}$$

C'est une équation de la forme (1).

Exemple 3. Une poutre est encastrée par son extrémité O et une force P agit verticalement à l'extrémité L à la distance l de la section d'encastrement (fig. 270). On négligera le poids de la poutre.

Considérons la section au point $N(x)$. Le moment fléchissant par rapport à la section N est dans le cas donné

$$M(x) = (l - x)P.$$

L'équation différentielle (2') devient

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l - x).$$

Conditions initiales: la déflexion y est nulle lorsque $x = 0$ et la tangente à l'axe de la poutre courbée est confondue avec l'axe Ox, c.-à-d.

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 0.$$

On trouve en intégrant l'équation:

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l-x)\, dx = \frac{P}{EJ}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right);$$

$$y = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{3}$$

Notamment, la formule (3) définit la flèche h à l'extrémité L:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 18. Quelques types d'équations différentielles du second ordre se ramenant à des équations du premier ordre. Problème de la deuxième vitesse cosmique

I. Equations de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

ne contenant pas explicitement la fonction inconnue y.

Solution. Désignons la dérivée $\frac{dy}{dx}$ par p: $\frac{dy}{dx} = p$. On aura $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

Substituant ces expressions des dérivées dans l'équation (1), on obtient une équation du premier ordre

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

où p est la fonction inconnue de x. On obtient par intégration sa solution générale

$$p = p(x, C_1),$$

puis l'on déduit de la relation $\frac{dy}{dx} = p$ l'intégrale générale de l'équation (1):

$$y = \int p(x, C_1)\, dx + C_2.$$

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle de la chaînette (voir § 1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Posons

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

et on obtient une équation différentielle du premier ordre par rapport à la fonction auxiliaire $p(x)$:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a},$$

d'où

$$\operatorname{Log}(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1,$$

$$p=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+C_1\right).$$

Mais comme $p=\frac{dy}{dx}$, cette dernière relation est une équation différentielle portant sur la onction inconnue y. On obtient en l'intégrant l'équation de la chaînette (voir § 1)

$$y=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+C_1\right)+C_2.$$

Trou ons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales suivantes:

$$y_{x=0}=a,$$
$$y'_{x=0}=0.$$

La première condition donne $C_2=0$, la seconde $C_1=0$. On obtient finalement:

$$y=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

R e m a r q u e. On intègre d'une manière analogue l'équation

$$y^{(n)}=f(x,\ y^{(n-1)}).$$

Posant $y^{(n-1)}=p$, on obtient pour déterminer p une équation du premier ordre :

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p).$$

Déterminant p en fonction de x, on déduit y de la relation $y^{(n-1)}=p$ (voir § 17).

II. E q u a t i o n s d e l a f o r m e

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

ne contenant pas explicitement la variable indépendante x. Posons à nouveau

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{3}$$

mais nous considérerons maintenant que p est fonction de y (et non de x, comme auparavant). On aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p.$$

Substituant dans l'équation (2) les expressions $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, on obtient une équation du premier ordre portant sur la fonction auxiliaire p:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p). \tag{4}$$

On trouve, en l'intégrant, p comme fonction de y et d'une constante arbitraire C_1:

$$p=p(y,\ C_1).$$

Substituant cette expression dans la relation (3), on trouve une équation différentielle du premier ordre relativement à la fonction y de x:

$$\frac{dy}{dx}=p(y,\ C_1).$$

On trouve en séparant les variables:

$$\frac{dy}{p(y,\ C_1)}=dx.$$

L'intégration de cette équation fournit l'intégrale générale de l'équation proposée:

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0.$$

Exemple 2. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}.$$

Solution. Posons $\frac{dy}{dx}=p$ et considérons p comme fonction de y. On a alors $y''=p\frac{dp}{dy}$ et on obtient une équation du premier ordre où la fonction inconnue est p:

$$3p\frac{dp}{dy}=y^{-\frac{5}{3}}.$$

On trouve en intégrant cette équation:

$$p^2=C_1-y^{-\frac{2}{3}} \text{ ou } p=\pm\sqrt{C_1-y^{-2/3}}.$$

Mais $p=\frac{dy}{dx}$; on obtient donc pour y l'équation

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-2/3}}}=dx \text{ ou } \frac{y^{1/3}\,dy}{\pm\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}=dx,$$

et on trouve

$$x+C_2=\pm\int\frac{y^{1/3}\,dy}{\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}.$$

Pour calculer cette intégrale, faisons la substitution :

$$C_1y^{2/3}-1=t^2.$$

On a alors

$$y^{1/3}=(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy=3t\,(t^2+1)^{1/2}\frac{1}{C_1^{3/2}}\,dt.$$

Par conséquent,

$$\int\frac{y^{1/3}\,dy}{\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}=\frac{1}{C_1^2}\int\frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt=\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1y^{2/3}-1}\;(C_1y^{2/3}+2).$$

On trouve finalement :

$$x+C_2=\pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1y^{2/3}-1}\;(C_1y^{2/3}+2).$$

Exemple 3. Supposons qu'un point matériel décrive la droite Ox sous l'action d'une force dépendant seulement de la position du point. L'équation différentielle du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x).$$

Soit $x=x_0$ et $\frac{dx}{dt}=v_0$ pour $t=0$.

Multiplions les deux membres de l'équation par $\frac{dx}{dt}\,dt$ et intégrons de 0 à t, on obtient :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx,$$

ou

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left[-\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx\right]=\frac{1}{2}mv_0^2=\text{const}.$$

Le premier terme de la dernière égalité représente l'énergie cinétique du point matériel et le second son énergie potentielle. Il résulte de l'égalité obtenue que la somme des énergies potentielle et cinétique est constante pendant le mouvement.

Problème du pendule mathématique. Considérons un point matériel de masse m se mouvant sous l'action de son propre poids sur une circonférence L dans un plan vertical. Trouvons l'équation du mouvement en faisant abstraction des forces de résistance (frottement, résistance de l'air, etc.).

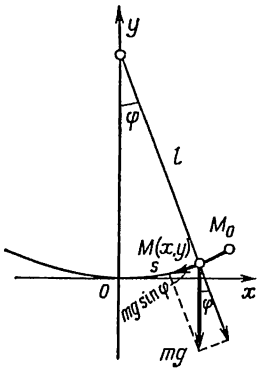


Fig. 271

Prenons l'origine des coordonnées au point le plus bas de la circonférence et dirigeons l'axe Ox tangentiellement à cette dernière (fig. 271).

Soient l le rayon de la circonférence, s la longueur de la portion d'arc de l'origine O au point variable M où se trouve la masse m, cet arc étant pris avec son signe ($s > 0$ si le point M est à droite de O ; $s < 0$ si le point M est à gauche de O).

On se propose de trouver la dépendance entre s et le temps t.

Décomposons la force de pesanteur mg en ses composantes tangentielle et normale. La première, qui est égale à $-mg \sin \varphi$, entraîne le mouvement, la seconde est compensée par la réaction de la circonférence décrite par la masse m.

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Comme on a pour la circonférence $\varphi = \frac{s}{l}$, on obtient l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}.$$

C'est une équation différentielle du type II (car elle ne contient pas explicitement la variable indépendante t).

Intégrons-la comme il a été indiqué ci-dessus :

$$\frac{ds}{dt} = p, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p.$$

Par conséquent,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l}$$

ou

$$p\, dp = -g \sin \frac{s}{l}\, ds,$$

donc

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1.$$

Désignons par s_0 l'élongation maximum du point M. La vitesse du point est nulle lorsque $s = s_0$:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0} = p\Big|_{s=s_0} = 0.$$

Ceci permet de déterminer C_1:

$$0=2gl\cos\frac{s_0}{l}+C_1,$$

d'où

$$C_1=-2gl\cos\frac{s_0}{l}.$$

Par conséquent,

$$p^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gl\left(\cos\frac{s}{l}-\cos\frac{s_0}{l}\right)$$

ou, en appliquant à cette dernière relation la formule relative à la différence de cosinus:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=4gl\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}, \tag{5}$$

ou *)

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}. \tag{6}$$

C'est une équation à variables séparables. Séparons les variables:

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,dt. \tag{7}$$

Nous supposerons pour l'instant que $s\neq s_0$, de sorte que le dénominateur de la fraction n'est pas nul. Si l'on suppose que $s=0$ lorsque $t=0$, on aura de l'égalité (7)

$$\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,t. \tag{8}$$

Cette égalité donne la dépendance entre s et t. L'intégrale de gauche ne s'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires. Il en est de même de s comme fonction de t. Considérons le problème posé approximativement. Nous supposerons que les angles $\frac{s_0}{l}$ et $\frac{s}{l}$ sont petits. Les angles $\frac{s+s_0}{2l}$ et $\frac{s_0-s}{2l}$ ne seront pas supérieurs à $\frac{s_0}{l}$. Remplaçons dans l'équation (6) les sinus par les angles:

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\frac{s+s_0}{2l}\cdot\frac{s_0-s}{2l}}$$

ou

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_0^2-s^2}. \tag{6'}$$

---

*) Nous prenons le signe plus devant le radical. Il découlera de la remarque faite à la fin de ce problème qu'il n'y a pas lieu d'examiner le cas du signe moins.

Séparons les variables, on obtient (en supposant provisoirement que $s \neq s_0$)

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, dt. \tag{7'}$$

Nous supposerons de nouveau que $s=0$ lorsque $t=0$. On obtient en intégrant cette équation :

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{8'}$$

ou

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

d'où

$$s = s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{9}$$

Remarque. Nous avons supposé jusqu'à présent $s \neq s_0$. Mais on peut s'assurer en substituant directement que la fonction (9) est solution de l'équation (6') quel que soit t.

Rappelons que la solution (9) est une solution approchée de l'équation (5), étant donné que nous avons remplacé l'équation (6) par l'équation approchée (6').

L'égalité (9) montre que le point M (que l'on peut considérer comme l'extrémité du pendule) accomplit des oscillations harmoniques de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Cette période ne dépend pas de l'amplitude de l'oscillation s_0.

Exemple 4. Problème de la deuxième vitesse cosmique.

Déterminer la vitesse avec laquelle il faut lancer un corps verticalement vers le haut pour qu'il échappe à l'attraction terrestre. On négligera la résistance de l'air.

Solution. Désignons les masses de la Terre et du corps respectivement par M et m. En vertu de la loi d'attraction newtonienne la force f sollicitant le corps m est

$$f = k\frac{M \cdot m}{r^2},$$

où r est la distance entre le centre de la Terre et le centre de gravité du corps lancé, k est la constante de gravitation universelle.

L'équation différentielle du mouvement du corps de masse m est

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M \cdot m}{r^2}$$

ou

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}. \tag{10}$$

Nous avons pris le signe moins parce que l'accélération est ici négative. L'équation différentielle (10) est une équation de la forme (2). Nous la résoudrons en prenant pour conditions initiales :

$$\text{pour } t=0 \quad r=R, \quad \frac{dr}{dt} = v_0.$$

R est ici le rayon de la Terre et v_0 la vitesse de lancement. Introduisons les notations

$$\frac{dr}{dt}=v, \qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr},$$

v étant la vitesse du mouvement. On obtient en substituant dans l'équation (10) :

$$v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2}.$$

Séparons les variables :

$$v\,dv=-kM\frac{dr}{r^2}.$$

On obtient en intégrant cette équation

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+C_1. \tag{11}$$

Déterminons C_1 de la condition que $v=v_0$ à la surface de la Terre ($r=R$)

$$\frac{v_0^2}{2}=kM\frac{1}{R}+C_1$$

ou

$$C_1=-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}.$$

Substituons la valeur de C_1 dans l'égalité (11) :

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}$$

ou

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{12}$$

Or, la vitesse du corps doit être constamment positive (elle ne s'annule pas), donc $\frac{v^2}{2}>0$. Comme la quantité $\frac{kM}{r}$ devient arbitrairement petite lorsque r croît indéfiniment, la condition $\frac{v^2}{2}>0$ aura lieu pour tout r seulement si

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geqslant 0 \tag{13}$$

ou

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

On a donc pour la vitesse minimum

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}, \tag{14}$$

où

$$k=6{,}66\cdot10^{-8}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{g}\cdot\text{s}^2},$$

$$R=63\cdot10^7\ \text{cm}.$$

A la surface de la Terre, $r = R$, l'accélération de la force de pesanteur est g $\left(g = 981\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right)$. Ceci étant, on déduit de l'égalité (10)

$$g = k\frac{M}{R^2}$$

ou

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Substituant cette valeur de M dans la formule (14), on obtient :

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 981\cdot 63\cdot 10^7} \approx 11{,}2\cdot 10^5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 11{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

§ 19. Intégration graphique des équations différentielles du second ordre

Voyons quelle est l'interprétation géométrique d'une équation différentielle du second ordre. Soit l'équation

$$y'' = f(x,\ y,\ y'). \tag{1}$$

Désignons par φ l'angle formé par la tangente à la courbe avec l'axe positif Ox ; on a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{2}$$

Pour expliciter le sens géométrique de la dérivée seconde, rappelons-nous la formule du rayon de courbure d'une courbe en un point donné *)

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

D'où

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Or

$$y' = \operatorname{tg}\varphi\,; \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi\,;$$

$$(1+y'^2)^{3/2} = |\sec^3\varphi| = \frac{1}{|\cos^3\varphi|},$$

par conséquent,

$$y'' = \frac{1}{R\,|\cos^3\varphi|}. \tag{3}$$

*) Nous supposions jusqu'à présent que le rayon de courbure était un nombre essentiellement positif, mais nous supposerons dans ce paragraphe que le rayon de courbure pourra prendre des valeurs tant positives que négatives : si la courbe est convexe ($y'' < 0$), nous supposerons le rayon de courbure négatif ($R < 0$) ; nous le supposerons positif ($R > 0$) si la courbe est concave ($y'' > 0$).

Substituant à présent dans l'équation (1) les expressions obtenues pour y' et y'', on aura

$$\frac{1}{R\,|\cos^3\varphi|}=f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi),$$

ou

$$R=\frac{1}{|\cos^3\varphi|\cdot f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi)}. \tag{4}$$

Ce qui montre qu'une équation différentielle du second ordre détermine la grandeur du rayon de courbure de la courbe intégrale, une fois données les coordonnées du point et la direction de la tangente en ce point.

Il résulte de ce qui précède une méthode de construction approchée d'une courbe intégrale admettant une tangente continue *) en chaque point; la courbe est constituée d'arcs de cercles.

Ainsi, supposons que l'on doive tracer la courbe intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales:

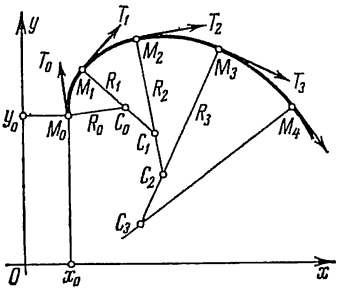


Fig. 272

$$y_{x=x_0}=y_0;\qquad y'_{x=x_0}=y'_0.$$

Menons par le point $M_0\,(x_0,\ y_0)$ un rayon M_0T_0 de pente $y'=\operatorname{tg}\varphi_0=y'_0$ (fig. 272). On déduit de l'équation (4) $R=R_0$. Portons au segment M_0C_0 de longueur R_0 sur la perpendiculaire à la direction M_0T_0 et traçons du point C_0 pris pour centre un petit arc de cercle $\widehat{M_0M_1}$ de rayon R_0. Remarquons qu'il faudra reporter le segment M_0C_0 du côté convenable pour que l'arc de cercle soit convexe vers le haut lorsque $R_0<0$ et qu'il soit convexe vers le bas lorsque $R_0>0$ (voir la note, p. 74).

Soit ensuite un point $M_1\,(x_1,\ y_1)$ sur l'arc de courbe construit, suffisamment voisin de M_0, et soit $\operatorname{tg}\varphi_1$ la pente de la tangente M_1T_1 à la courbe au point M_1. Déduisons de l'équation (4) la valeur $R=R_1$ correspondant à M_1. Menons le segment M_1C_1, égal à R_1, perpendiculairement à M_1T_1 et, de C_1 comme centre, traçons un arc $\widehat{M_1M_2}$ de rayon R_1. Prenons ensuite sur cet arc un point $M_2\,(x_2,\ y_2)$ voisin de M_1 et continuons notre construction jusqu'à ce que l'on obtienne un morceau de courbe suffisamment grand formé d'arcs de cercles. Il résulte de ce qui précède que cette courbe

*) C'est-à-dire que la pente est une fonction continue de l'arc s.

est approximativement une courbe intégrale passant par le point M_0. Il est évident que la courbe construite sera d'autant plus proche de la courbe intégrale que les arcs $\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, ... seront plus petits.

§ 20. Equations linéaires homogènes. Définitions et propriétés générales

Définition 1. Une équation différentielle d'ordre n est dite *linéaire* si elle est du premier degré par rapport à la fonction inconnue y et ses dérivées y', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, c.-à-d. si elle est de la forme

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x), \tag{1}$$

où a_0, a_1, ..., a_n et $f(x)$ sont des fonctions données de x ou des constantes, et $a_0 \neq 0$ quel que soit x dans le domaine de définition de l'équation (1). Nous supposerons par la suite que les fonctions a_0, a_1, ..., a_n et $f(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de x et que $a_0 = 1$ (sinon il suffira de diviser tous les termes par a_0). La fonction $f(x)$ est appelée le *second membre de l'équation*.

Si $f(x) \not\equiv 0$, l'équation est dite *non homogène* ou encore *avec second membre*. Si $f(x) \equiv 0$, l'équation s'écrit

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0 \tag{2}$$

et elle est dite *homogène* ou *sans second membre* (le premier membre de cette équation est une fonction homogène du premier degré par rapport à y, y', y'', ..., $y^{(n)}$).

Etablissons quelques propriétés fondamentales des équations linéaires homogènes, en nous bornant dans les démonstrations aux équations du second ordre.

Théorème. 1. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation linéaire homogène du second ordre*

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \tag{3}$$

$y_1 + y_2$ est aussi solution de cette équation.

Démonstration. Etant donné que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation proposée, on a

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Substituant la somme $y_1 + y_2$ dans l'équation (3) et prenant en considération les identités (4), on aura

$$(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=$$
$$=(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)=0+0=0,$$

ce qui montre que $y_1 + y_2$ est solution de l'équation.

Théorème 2. *Si y_1 est solution de l'équation* (3) *et si C est une constante, Cy_1 est aussi une solution de cette équation.*

Démonstration. Substituant dans l'équation (3) l'expression Cy_1, on obtient :

$$(Cy_1)''+a_1(Cy_1)'+a_2(Cy_1)=C(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)=C\cdot 0=0\,;$$

et le théorème est démontré.

Définition 2. Deux solutions y_1 et y_2 de (3) sont dites *linéairement indépendantes sur le segment* $[a, b]$ si leur rapport n'est pas constant sur ce segment, c.-à-d. si

$$\frac{y_1}{y_2}\neq \text{const}.$$

Sinon, les solutions sont dites *linéairement dépendantes*. En d'autres termes, deux solutions y_1 et y_2 sont dites *linéairement dépendantes* sur le segment $[a, b]$ s'il existe une constante λ telle que $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$ pour $a\leqslant x\leqslant b$. On a alors $y_1=\lambda y_2$.

Exemple 1. Soit l'équation $y''-y=0$. On vérifie facilement que les fonctions e^x, e^{-x}, $3e^x$, $5e^{-x}$ sont des solutions de cette équation. Les fonctions e^x et e^{-x} sont linéairement indépendantes sur tout segment, étant donné que le rapport $\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$ ne reste pas constant lorsque x varie. Les fonctions e^x et $3e^x$, elles, sont linéairement dépendantes, car $\frac{3e^x}{e^x}=3=\text{const}$.

Définition 3. y_1 et y_2 étant des fonctions de x, le déterminant

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

est appelé le *déterminant de Wronski* ou *wronskien* des fonctions données.

Théorème 3. *Si les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur le segment $[a, b]$, leur wronskien est identiquement nul sur ce segment.*

En effet, si $y_2=\lambda y_1$, où $\lambda=\text{const}$, $y_2'=\lambda y_1'$ et

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix}=0.$$

Théorème 4. *Si le déterminant de Wronski* $W(y_1, y_2)$ *des solutions* y_1 *et* y_2 *de l'équation linéaire homogène* (3) *n'est pas nul en un point* $x = x_0$ *du segment* $[a, b]$ *où les coefficients de l'équation sont continus, il ne s'annule nulle part sur ce segment.*

Démonstration. y_1 et y_2 étant deux solutions de l'équation (3), on a

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \quad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Multipliant les termes de la première égalité par y_1, ceux de la seconde par $-y_2$ et ajoutant, on obtient:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \tag{5}$$

Le coefficient de a_1 dans (5) est le wronskien $W(y_1, y_2)$ et précisément $W(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)$. Le premier terme est la dérivée du wronskien:

$$W'_x(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Par conséquent, l'égalité (5) s'écrit

$$W' + a_1 W = 0. \tag{6}$$

Trouvons la solution de la dernière équation satisfaisant à la condition initiale $W|_{x=x_0} = W_0$. Trouvons d'abord la solution générale de l'équation (6) en supposant $W \neq 0$. Séparant les variables dans l'équation (6), on obtient $\frac{dW}{W} = -a_1\, dx$.

On obtient en intégrant

$$\operatorname{Log} W = -\int_{x_0}^{x} a_1\, dx + \operatorname{Log} C$$

ou

$$\operatorname{Log} \frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1\, dx,$$

d'où

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1\, dx}. \tag{7}$$

Il est à remarquer que l'on peut écrire la fonction (7) et dire qu'elle vérifie l'équation (6), ce dont on peut se convaincre aisément par substitution directe de cette fonction dans l'équation (6). L'hypothèse $W \neq 0$ n'est plus indispensable. La formule (7) est appelée *formule de Liouville*.

Déterminons C de sorte que soit vérifiée la condition initiale. Portant $x = x_0$ dans le premier et le second membre de l'égalité (7) nous trouvons

$$W_0 = C.$$

Par conséquent, la solution vérifiant les conditions initiales sera de la forme:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1\, dx}. \tag{7'}$$

Par hypothèse $W_0 \neq 0$. Il résulte alors de l'égalité (7') que $W \neq 0$ quel que soit x, car l'exponentielle ne peut s'annuler pour des valeurs finies de la variable. Le théorème est démontré.

Remarque 1. Si le wronskien est nul pour une certaine valeur $x = x_0$, il est alors nul pour toute valeur x du segment considéré. Ceci résulte directement de la formule (7): si $W = 0$ pour $x = x_0$, alors

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

par conséquent, $W \equiv 0$ quelle que soit la valeur de la borne supérieure x dans la formule (7).

Théorème 5. *Si les solutions y_1 et y_2 de l'équation* (3) *sont linéairement indépendantes sur le segment* $[a, b]$, *le déterminant de Wronski formé avec ces solutions ne s'annule en aucun point de ce segment.*

Démonstration. Avant d'entamer la démonstration faisons les remarques suivantes. La fonction $y \equiv 0$ est une solution de l'équation (3) sur le segment $[a, b]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=x_0} = 0, \quad y'_{x=x_0} = 0,$$

où x_0 est un point quelconque du segment $[a, b]$. En vertu du théorème d'existence et d'unicité (cf. § 16) qui s'applique à l'équation (3), il résulte que cette équation ne possède aucune autre solution satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=x_0} = 0, \quad y'_{x=x_0} = 0.$$

Toujours du même théorème il résulte que si une solution de l'équation (3) est identiquement nulle sur un certain segment ou intervalle (α, β) contenu dans le segment $[a, b]$, cette solution est identiquement nulle sur tout le segment $[a, b]$. En effet, au point $x = \beta$ (et au point $x = \alpha$) la solution satisfait aux conditions initiales

$$y_{x=\beta} = 0, \quad y'_{x=\beta} = 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème d'unicité elle est nulle dans un certain intervalle $\beta - d < x < \beta + d$, où d est déterminé par la valeur des coefficients de l'équation (3). En élargissant donc chaque fois d'une grandeur d l'intervalle où $y \equiv 0$, on montre que $y \equiv 0$ sur tout le segment $[a, b]$.

Ceci dit, passons maintenant à la démonstration du théorème (5).

Supposons que $W(y_1, y_2) = 0$ en un certain point du segment $[a, b]$. D'après le théorème 3 le wronskien sera nul en tous les points du segment $[a, b]$

$$W = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

Supposons que $y_1 \neq 0$ sur le segment $[a, b]$. Par conséquent,

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \text{ ou encore } \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const},$$

c'est-à-dire que y_1 et y_2 sont linéairement dépendants, ce qui contredit l'hypothèse de leur indépendance linéaire.

Supposons encore que $y_1 = 0$ aux points $x_1, x_2, \ldots, x_k$, du segment $[a, b]$. Considérons l'intervalle (a, x_1). Dans cet intervalle $y_1 \neq 0$. De ce que nous venons tout juste de démontrer il découle donc que dans l'intervalle (a, x_1)

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const} \quad \text{ou} \quad y_2 = \lambda y_1.$$

Considérons la fonction $y = y_2 - \lambda y_1$. Les fonctions y_2 et y_1 étant solutions de l'équation (3), $y = y_2 - \lambda y_1$ est également solution de cette équation et $y \equiv 0$ dans l'intervalle (a, x_1). Par conséquent, d'après les remarques faites en début de démonstration il s'ensuit que $y = y_2 - \lambda y_1 \equiv 0$ sur le segment $[a, b]$ ou

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda$$

sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire que y_2 et y_1 sont linéairement dépendants.

Ceci étant contraire à l'hypothèse sur l'indépendance linéaire des solutions y_1 et y_2, nous avons donc démontré que le wronskien ne s'annule en aucun point du segment $[a, b]$.

Théorème 6. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* (3), *alors*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{8}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, est la solution générale de cette équation.

Démonstration. Il résulte des théorèmes 1 et 2 que la fonction

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

est solution de l'équation (3), quelles que soient les constantes C_1 et C_2.

Montrons à présent que, quelles que soient les conditions initiales les $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, il est possible de choisir les valeurs des constantes C_1 et C_2 de sorte que la solution particulière correspondante $C_1y_1 + C_2y_2$ satisfasse aux conditions initiales.

Substituant les conditions initiales dans l'égalité (8), on a

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1y_{10} + C_2y_{20}, \\ y'_0 &= C_1y'_{10} + C_2y'_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où l'on a posé

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}; \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20};$$
$$(y'_1)_{x=x_0} = y'_{10}; \quad (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}.$$

On peut tirer C_1 et C_2 du système (9), car le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10}y'_{20} - y'_{10}y_{20}$$

est le déterminant de Wronski pour $x = x_0$ et n'est donc pas nul (étant donné que les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes). La solution particulière déduite de la famille (8) en y remplaçant C_1 et C_2 par les valeurs trouvées satisfait aux conditions initiales données. Le théorème est démontré.

Exemple 2. L'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0,$$

dont les coefficients $a_1 = \frac{1}{x}$ et $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ sont continus sur tout segment ne contenant pas le point $x = 0$, admet les solutions particulières

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(il est facile de le vérifier en substituant dans l'équation). La solution générale s'écrit donc

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x}.$$

Remarque 2. Il n'existe pas de méthode générale permettant de trouver sous forme finie la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients variables. Toutefois, il existe une telle méthode pour les équations à coefficients constants. Elle

fera l'objet du paragraphe suivant. Pour ce qui est des équations dont les coefficients sont variables, on indiquera au chapitre XVI « Séries » plusieurs procédés permettant de trouver des solutions approchées satisfaisant aux conditions initiales.

Nous allons démontrer maintenant un théorème permettant de trouver la solution générale d'une équation différentielle du second ordre à coefficients variables si l'on connaît une solution particulière. Comme on arrive parfois à trouver ou à deviner directement une solution particulière, ce théorème peut être utile dans maints cas.

Théorème 7. *Si l'on connaît une solution particulière d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, la recherche de la solution générale se ramène à des quadratures.*

Démonstration. Soit y_1 une solution particulière connue de l'équation

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Trouvons une autre solution particulière de l'équation proposée telle que y_1 et y_2 soient linéairement indépendantes. La solution générale s'écrira alors $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. On peut écrire en vertu de la formule (7) (voir la démonstration du théorème 4):

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = Ce^{-\int a_1\,dx}.$$

Par conséquent, on a pour la détermination de y_2 une équation linéaire du premier ordre. Intégrons-la comme suit. Divisons tous les termes par y_1^2:

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1\,dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1\,dx};$$

d'où

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C'.$$

Comme nous cherchons une solution particulière, on aura en posant $C' = 0$, $C = 1$:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{10}$$

Il est évident que y_1 et y_2 sont des solutions linéairement indépendantes, car $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const}$.

La solution générale de l'équation proposée s'écrit donc

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\, dx}}{y_1^2}\, dx. \tag{11}$$

Exemple 3. Trouver la solution générale de l'équation

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Solution. On vérifie directement que cette équation a pour solution particulière $y_1 = x$. Trouvons une seconde solution particulière y_2 telle que y_1 et y_2 soient linéairement indépendantes.

Remarquant que $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, on obtient, en vertu de la formule (10):

$$y = x \int e^{\int \frac{2x\, dx}{1-x^2}} \frac{dx}{x^2} = x \int \frac{e^{-\operatorname{Log}|1-x^2|}}{x^2}\, dx =$$

$$= x \int \frac{dx}{x^2 |1-x^2|} = x \int \left(\pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx =$$

$$= x \left[\mp \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right].$$

La solution générale est donc

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2}\, x \operatorname{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \mp 1 \right).$$

§ 21. Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Soit l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

où p et q sont des constantes réelles. Pour trouver l'intégrale générale de cette équation, il suffit, comme nous l'avons montré plus haut, de trouver deux solutions particulières linéairement indépendantes.

Cherchons les solutions particulières sous la forme

$$y = e^{kx}, \quad \text{où} \quad k = \text{const}; \tag{2}$$

alors

$$y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Substituons ces expressions des dérivées dans l'équation (1):

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Comme $e^{kx} \neq 0$, on doit avoir

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Par conséquent, si k est racine de l'équation (3), la fonction e^{kx} sera solution de l'équation (1). L'équation (3) est appelée *équation caractéristique* de l'équation (1).

L'équation caractéristique est une équation du second degré dont nous désignerons les racines par k_1 et k_2. On a

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Les trois cas suivants peuvent se présenter:

I. k_1 et k_2 sont des nombres réels distincts ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 et k_2 sont des nombres complexes;

III. k_1 et k_2 sont des nombres réels égaux ($k_1 = k_2$).

Examinons chaque cas séparément.

I. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes: $k_1 \neq k_2$. On aura alors pour solutions particulières

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes, car

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}.$$

L'intégrale générale s'écrit, par conséquent,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Exemple 1. Soit l'équation

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Trouvons les racines de cette équation:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2};$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

L'intégrale générale est

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

II. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes. Etant donné que les racines complexes sont conjuguées, posons:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

où

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

On peut mettre les solutions particulières sous la forme

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}; \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{4}$$

Ce sont des fonctions complexes d'une variable réelle vérifiant l'équation différentielle (1) (voir § 4, chap. VII).

Il est évident que si une fonction complexe d'une variable réelle

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

vérifie l'équation (1), cette équation est vérifiée séparément par les fonctions $u(x)$ et $v(x)$.

En effet, substituons l'expression (5) dans l'équation (1):

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ou

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Mais une fonction complexe n'est nulle que si, et seulement si, les parties réelle et imaginaire sont nulles séparément, c.-à-d.

$$u'' + pu' + qu = 0,$$
$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Nous venons de démontrer que $u(x)$ et $v(x)$ sont solutions de l'équation proposée.

Recopions les solutions complexes (4) sous forme de somme des parties réelle et imaginaire:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

D'après ce qui vient d'être démontré, les fonctions réelles suivantes seront des solutions particulières de l'équation (1):

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{6'}$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{6''}$$

Les fonctions $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ sont linéairement indépendantes, car

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \operatorname{cotg}\beta x \neq \text{const}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (1) dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont complexes prend la forme

$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ou

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \tag{7}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Un important cas particulier de la solution (7) est celui où les racines de l'équation caractéristique sont des *nombres imaginaires purs*.

Ceci a lieu lorsque dans l'équation (1) $p = 0$. A ce moment

$$y'' + qy = 0.$$

L'équation caractéristique (3) prend la forme

$$k^2 + q = 0, \quad q > 0.$$

Ses racines sont donc

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \ \alpha = 0.$$

Par suite la solution (7) est de la forme

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

Exemple 2. Soit l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Trouver l'intégrale générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$. Construire la courbe intégrale correspondante.

Solution. 1) Ecrivons l'équation caractéristique

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

et trouvons ses racines:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

2) Trouvons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données: déterminons à cet effet les valeurs correspondantes de C_1 et C_2. On déduit de la première condition:

$$0 = e^{-0} (C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0), \text{ d'où } C_1 = 0.$$

Remarquant que

$$y' = e^{-x} 2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x,$$

on déduit de la seconde condition:

$$1 = 2C_2, \quad \text{ou bien} \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

La solution particulière cherchée est donc

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

La courbe est représentée par la fig. 273.

Exemple 3. Soit l'équation

$$y'' + 9y = 0.$$

Trouver l'intégrale générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 3.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique

$$k^2 + 9 = 0.$$

Ses racines sont

$$k_1 = 3i, \; k_2 = -3i.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Cherchons maintenant la solution particulière. Dérivons

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

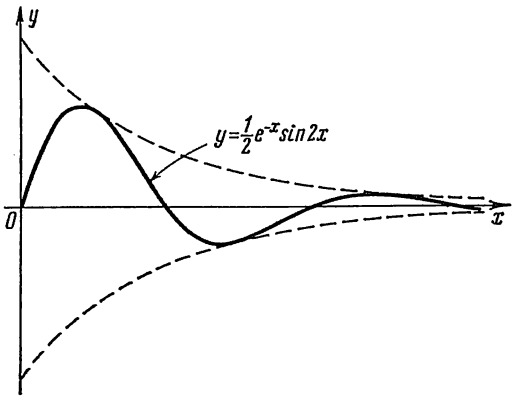


Fig. 273

En appliquant les conditions initiales, nous obtenons

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0,$$
$$3 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0,$$

d'où l'on tire $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.
La solution particulière est donc

$$y = \sin 3x.$$

III. L'équation caractéristique admet une racine réelle double. On a alors $k_1 = k_2$.

On obtient une solution particulière $y_1 = e^{k_1 x}$ en vertu des raisonnements précédents. Il faut trouver une seconde solution particulière linéairement indépendante de la première (la fonction $e^{k_2 x}$ est identiquement égale à $e^{k_1 x}$ et ne peut être considérée comme une seconde solution particulière).

Nous chercherons la seconde solution particulière sous la forme

$$y_2 = u(x)\, e^{k_1 x},$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue que l'on doit déterminer.

Dérivons :

$$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u),$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u).$$

On obtient en substituant les expressions des dérivées dans l'équation (1) :

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Comme k_1 est une racine double de l'équation caractéristique, on a

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

En outre, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ou $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Par conséquent, pour trouver $u(x)$, il faut résoudre l'équation $e^{k_1x}u'' = 0$ ou $u'' = 0$. On trouve en intégrant $u = C_1x + C_2$. On peut poser $C_1 = 1$, $C_2 = 0$; on a alors $u = x$. On peut donc prendre pour seconde solution la fonction

$$y_2 = xe^{k_1x}.$$

Cette solution est linéairement indépendante de la première, étant donné que $\frac{y_2}{y_1} = x \not\equiv \text{const}$. On prendra donc pour intégrale générale la fonction

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x).$$

Exemple 4. Soit l'équation

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

L'équation caractéristique $k^2 - 4k + 4 = 0$ a pour racines $k_1 = k_2 = 2$. L'intégrale générale s'écrit :

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

§ 22. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants

Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0. \qquad (1)$$

Nous supposerons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes. Avant d'indiquer une méthode de résolution de l'équation (1), nous donnerons deux définitions qui nous seront utiles par la suite.

Définition 1. Si l'on a pour tous les x du segment $[a, b]$ l'égalité

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des constantes non toutes nulles, on dit que $\varphi_n(x)$ est une *combinaison linéaire des fonctions* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$.

Définition 2. n fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ sont dites *linéairement indépendantes* si aucune d'elles ne peut être représentée comme combinaison linéaire des autres.

Remarque 1. Il résulte de ces définitions que si les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont *linéairement dépendantes*, il existe alors des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ non toutes nulles et telles que l'on a, quel que soit x pris sur le segment $[a, b]$,

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Exemple 1. Les fonctions $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = 3e^x$ sont linéairement dépendantes, car on a pour $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{3}$ l'identité

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3 3e^x \equiv 0.$$

Exemple 2. Les fonctions $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ sont linéairement indépendantes, car on ne peut annuler identiquement l'expression

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

avec des C_1, C_2, C_3 non tous nuls.

Exemple 3. Les fonctions $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}, \ldots, y_n = e^{k_nx}, \ldots, \ldots$, avec $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ arbitraires, sont linéairement indépendantes. (Nous ne démontrons pas cette proposition.)

Passons maintenant à la solution de l'équation (1). On a pour cette équation le théorème suivant.

Théorème. *Si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation* (1), *sa solution générale est de la forme*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{2}$$

où $C_1, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

Si les coefficients de l'équation (1) sont constants, on trouve la solution générale tout comme pour l'équation du second ordre.

1) On forme l'équation caractéristique

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

2) On trouve les racines de l'équation caractéristique

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

3) Suivant le caractère des racines, on écrit les solutions particulières linéairement indépendantes en partant de ce qui suit:

a) il correspond à toute racine réelle simple k une solution particulière e^{kx};

b) il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées simples $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ et $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ deux solutions particulières $e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

c) il correspond à toute racine réelle k d'ordre de multiplicité r autant de solutions particulières linéairement indépendantes

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{kx};$$

d) il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, d'ordre de multiplicité μ, 2μ solutions particulières:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Le nombre de ces solutions est égal au degré de l'équation caractéristique (qui est aussi l'ordre de l'équation différentielle proposée). On démontre que ces solutions sont linéairement indépendantes.

4) Ayant trouvé n solutions linéairement indépendantes $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$, on écrit la solution générale de l'équation différentielle proposée sous la forme

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

Exemple 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$k^4 - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont:

$$k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i,\ k_4 = -i.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x,$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes arbitraires.

Remarque 2. Il résulte de ce qui précède que toute la difficulté de la résolution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est dans la résolution de l'équation caractéristique correspondante.

§ 23. Equations linéaires non homogènes du second ordre

Soit une équation linéaire non homogène du second ordre

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

La structure de la solution générale de l'équation (1) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1. *La solution générale de l'équation non homogène* (1) *est la somme d'une solution particulière quelconque* y^* *de cette équation et de la solution générale* $\bar{y}$ *de l'équation homogène correspondante*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{2}$$

Démonstration. On doit démontrer que la somme

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

est la solution générale de l'équation (1). Démontrons en premier lieu que la fonction (3) est une solution de l'équation (1).

Substituons la somme $\bar{y} + y^*$ dans l'équation (1) au lieu de y, on aura :

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ou

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x). \tag{4}$$

$\bar{y}$ étant solution de l'équation (2), l'expression dans les premières parenthèses est identiquement nulle. y^* étant une solution de l'équation (1), l'expression dans les secondes parenthèses est égale à $f(x)$. L'égalité (4) est donc une identité. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Montrons à présent que l'expression (3) est la solution générale de l'équation (1), c.-à-d. que l'on peut choisir les constantes arbitraires qu'elle contient de manière que soient satisfaites les conditions initiales :

$$\left.\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

quels que soient x_0, y_0 et y'_0 (pourvu que x_0 soit pris dans le domaine de continuité des fonctions a_1, a_2 et $f(x)$).

Remarquant que l'on peut mettre $\bar{y}$ sous la forme

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2) et C_1 et C_2 des constantes arbitraires, on peut recopier l'éga-

lité (3) sous la forme

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y^*. \tag{3'}$$

Il résulte des conditions (5) que *)

$$C_1y_{10} + C_2y_{20} + y_0^* = y_0,$$
$$C_1y'_{10} + C_2y'_{20} + y_0^{*\prime} = y'_0.$$

Il nous faut déduire C_1 et C_2 de ce système. Recopions-le sous la forme

$$\left.\begin{aligned} C_1y_{10} + C_2y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1y'_{10} + C_2y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*\prime}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

On remarque que le déterminant des coefficients des inconnues C_1 et C_2 est le wronskien des fonctions y_1 et y_2 calculé au point $x = x_0$. Etant donné que ces fonctions sont linéairement indépendantes par hypothèse, le wronskien n'est pas nul; le système (6) possède donc une solution bien déterminée C_1 et C_2, c.-à-d. qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que la formule (3) définit la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales données. Le théorème est complètement démontré.

Par conséquent, si l'on connaît la solution générale $\bar{y}$ de l'équation sans second membre (2), le problème revient à trouver une solution particulière quelconque y^* de l'équation avec second membre (1).

Indiquons une méthode générale permettant de trouver des solutions particulières d'une équation avec second membre.

Méthode de la variation des constantes arbitraires. Ecrivons la solution générale de l'équation homogène (2):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{7}$$

Nous allons chercher une solution particulière de l'équation non homogène (1) sous la forme (7) en considérant C_1 et C_2 comme des fonctions de x qu'il faut déterminer.

Dérivons l'égalité (7):

$$y' = C_1y'_1 + C_2y'_2 + C'_1y_1 + C'_2y_2.$$

Choisissons les fonctions C_1 et C_2 de manière que soit satisfaite l'égalité

$$C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0. \tag{8}$$

Ceci étant, la dérivée première y' devient

$$y' = C_1y'_1 + C_2y'_2.$$

*) Ici y_{10}, y_{20}, y_0^*, y'_{10}, y'_{20}, $y_0^{*\prime}$ sont les valeurs que prennent les fonctions y_1, y_2, y^*, y'_1, y'_2, $y^{*\prime}$ pour $x = x_0$.

Dérivons maintenant cette expression, on trouve y'':

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

Substituons y, y', y'' dans l'équation (1), on obtient:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

ou

$$C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Les expressions contenues dans les deux premières parenthèses s'annulent du fait que y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène. Par conséquent, cette dernière égalité prend la forme

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{9}$$

Ainsi, la fonction (7) est une solution de l'équation avec second membre (1) pourvu que les fonctions C_1 et C_2 satisfassent aux équations (8) et (9), c.-à-d. si l'on a

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Or, le déterminant de ce système est le wronskien des solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de l'équation (2), donc il n'est pas nul; on trouve C_1' et C_2' comme fonctions de x en résolvant le système précédent:

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

On trouve en intégrant:

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx + \overline{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx + \overline{C}_2,$$

où $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2$ sont des constantes d'intégration.

Substituant les expressions de C_1 et C_2 dans l'égalité (7), on trouve une intégrale dépendant de deux constantes arbitraires $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2$, c.-à-d. la solution générale de l'équation avec second membre *).

Exemple. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Solution. Trouvons la solution générale de l'équation homogène

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

On a:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \operatorname{Log} y' = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} C, \quad y' = Cx;$$

ainsi,

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

*) Si l'on pose $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, on obtient une solution particulière de l'équation (1).

Pour que cette expression soit la solution de l'équation proposée, il faut déterminer C_1 et C_2 comme fonctions de x du système

$$C_1'x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1'x + C_2' \cdot 0 = x.$$

On trouve en résolvant ce système:

$$C_1' = \frac{1}{2}, \qquad C_2' = -\frac{1}{2}x^2,$$

et par intégration:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1, \qquad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \overline{C}_2.$$

Substituant les fonctions trouvées dans la formule $y = C_1x^2 + C_2$, on obtient la solution générale de l'équation avec second membre:

$$y = \overline{C}_1x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

ou $y = \overline{C}_1x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{2}$, où $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2$ sont des constantes arbitraires.

Le théorème suivant peut être utile pour la recherche de solutions particulières.

Théorème 2. *La solution y^* de l'équation*

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x), \tag{10}$$

où le second membre est la somme de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$), peut être exprimée sous la forme d'une somme $y^* = y_1^* + y_2^*$, où y_1^* et y_2^* sont les solutions respectives des équations*

$$y_1^{*''} + a_1y_1^{*'} + a_2y_1^* = f_1(x), \tag{11}$$

$$y_2^{*''} + a_1y_2^{*'} + a_2y_2^* = f_2(x). \tag{12}$$

Démonstration. En ajoutant membre à membre les équations (11) et (12), on obtient:

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(y_1^* + y_2^*)' + a_2(y_1^* + y_2^*) = f_1(x) + f_2(x). \tag{13}$$

Par conséquent, $y_1^* + y_2^* = y^*$ est une solution de l'équation (10).

Exemple. Trouver la solution particulière y^* de l'équation

$$y'' - 4y = x + 3e^x.$$

Solution: La solution particulière e l'équation

$$y_1^{*''} + 4y_1^* = x$$

est

$$y_1^* = \frac{1}{4}x.$$

---

*) Il est évident que ce théorème subsiste pour un nombre arbitraire de termes dans le second membre.

Celle de l'équation

$$y_2^{*\prime\prime} + 4y_2^* = 3e^x$$

est

$$y_2^* = \frac{3}{5} e^x.$$

La solution particulière y^* de l'équation donnée est donc :

$$y^* = \frac{1}{4} x + \frac{3}{5} e^x.$$

§ 24. Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants

Soit l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

où p et q sont des nombres réels.

On a indiqué au paragraphe précédent une méthode générale de recherche des solutions des équations non homogènes. Lorsque l'équation est à coefficients constants, il est parfois plus simple de trouver une solution particulière sans intégration. Considérons les types d'équations (1) auxquelles cette remarque s'applique.

I. Supposons que le second membre de l'équation (1) soit le produit d'une exponentielle par un polynôme :

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \tag{2}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme du n-ième degré. Les cas suivants peuvent se présenter :

a) Le nombre α n'est pas une racine de l'équation caractéristique

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Il faut alors chercher la solution particulière sous la forme

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}. \tag{3}$$

En effet, substituant y^* dans l'équation (1) et simplifiant par $e^{\alpha x}$, on aura

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) = P_n(x). \tag{4}$$

$Q_n(x)$ est un polynôme de degré n, $Q_n'(x)$ et $Q_n''(x)$ sont respectivement des polynômes de degrés $n - 1$ et $n - 2$. On a donc de part et d'autre du signe d'égalité des polynômes de degré n. Egalant les coefficients des mêmes puissances de x (le nombre des coefficients inconnus est égal à $n + 1$), on obtient un système de $n + 1$ équations pour la détermination des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

b) α est une racine simple de l'équation caractéristique.

Si l'on cherchait alors une solution particulière sous la forme (3), on obtiendrait dans le premier membre de l'égalité (4) un polynôme de degré $n - 1$, étant donné que le coefficient de $Q_n(x)$, soit $\alpha^2 + p\alpha + q$, est nul et que $Q'_n(x)$ et $Q''_n(x)$ sont des polynômes de degrés inférieurs à n. Par conséquent, l'égalité (4) ne pourrait être une identité quel que soit le choix des constantes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Donc, dans le cas considéré, on cherchera la solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré $n + 1$ privé de son terme constant (car ce dernier disparaît après dérivation) *):

$$y^* = xQ_n(x)\, e^{\alpha x}.$$

c) α est une racine double de l'équation caractéristique. Le degré du polynôme s'abaisse alors de deux unités quand on substitue la fonction $Q_n(x)\, e^{\alpha x}$ dans l'équation différentielle. En effet, α étant une racine de l'équation caractéristique, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; en outre, α étant racine double, on a $2\alpha = -p$ (on sait, en effet, que la somme des racines de l'équation réduite du second degré est égale au coefficient du terme du premier degré pris avec le signe moins). Ainsi, $2\alpha + p = 0$.

Il reste donc dans le premier membre de l'égalité (4) $Q''_n(x)$, c.-à-d. un polynôme de degré $n - 2$. Pour que le résultat de la substitution soit un polynôme de degré n, il faut chercher une solution particulière sous forme de produit de $e^{\alpha x}$ par un polynôme de degré $n + 2$. La constante et le terme du premier degré de ce polynôme disparaissent alors après dérivation et on pourra les omettre dans la solution particulière.

Ainsi donc, lorsque α est une racine double de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = x^2 Q_n(x)\, e^{\alpha x}.$$

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

Solution. La solution générale de l'équation homogène correspondante est

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Comme le second membre de l'équation non homogène est de la forme xe^{0x} [c.-à-d. de la forme $P_1(x)\, e^{0x}$] et 0 n'étant pas racine de l'équation caractéristique $k^2 + 4k + 3 = 0$, nous chercherons une solution particulière sous la forme $y^* = Q_1(x)\, e^{0x}$, c.-à-d. que nous poserons

$$y^* = A_0 x + A_1.$$

---

*) Notons que tous les résultats apportés ci-dessus sont également valables lorsque α est un nombre complexe (ceci résulte des règles de dérivation de la fonction e^{mx}, m étant un nombre complexe arbitraire; voir § 4, ch. VII).

Substituons cette expression dans l'équation proposée, on a:

$$4A_0 + 3(A_0x + A_1) = x.$$

On déduit, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x de part et d'autre du signe d'égalité:

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

d'où

$$A_0 = \frac{1}{3}; \qquad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Par conséquent,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

La solution générale $y = \bar{y} + y^*$ sera

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Solution. On trouve facilement la solution générale de l'équation:

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Le second membre de l'équation donnée $(x^2 + 1)e^{3x}$ est de la forme

$$P_2(x)e^{3x}.$$

Comme le coefficient 3 dans l'exposant n'est pas une racine de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution particulière sous la forme

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \quad \text{ou} \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Substituons cette expression dans l'équation différentielle:

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = \\ = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Simplifiant par e^{3x} et égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient:

$$18A = 1, \quad 12A + 18B = 0, \quad 2A + 6B + 18C = 1,$$

d'où $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$. La solution particulière est donc

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

et la solution générale

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}.$$

Exemple 3. Résoudre l'équation

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Solution. Le second membre est ici de la forme $P_1(x)e^{1\cdot x}$, où 1 de l'exposant est une racine simple du polynôme caractéristique. Nous chercherons

donc une solution particulière sous la forme $y^* = xQ_1(x)e^x$ ou

$$y^* = x(Ax + B)e^x;$$

substituons cette expression dans l'équation, on a:

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + \\ + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x,$$

ou encore

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x.$$

On obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de x:

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = -2,$$

d'où $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. On a donc pour solution particulière

$$y^* = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x,$$

et la solution générale s'écrit

$$y = C_1e^{0x} + C_2e^x + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x.$$

II. Supposons le second membre de la forme

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{5}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

On peut examiner ce cas comme précédemment en passant des fonctions trigonométriques à des exponentielles. Remplaçons $\cos\beta x$ et $\sin\beta x$ par leurs expressions exponentielles données par les formules d'Euler (voir § 5, chap. VII); on obtient:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

ou

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x} + \\ + \left[\frac{1}{2}P(x) - \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{6}$$

On a dans les crochets des polynômes dont le degré est égal au degré le plus élevé de $P(x)$ ou de $Q(x)$. On voit que le second membre a été mis sous la forme du cas I.

On montre (nous ne le démontrerons pas) qu'on peut trouver des solutions particulières ne contenant pas de quantités complexes.

Par conséquent, lorsque le second membre de l'équation (1) est de la forme

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{7}$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant des polynômes, on détermine comme suit la forme de la solution particulière:

a) si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, il faut chercher une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y^* = U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{8}$$

$U(x)$ et $V(x)$ étant des polynômes dont le degré est égal au degré le plus élevé de $P(x)$ ou de $Q(x)$;

b) si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, on prendra une solution particulière sous la forme

$$y^* = x\,[U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x]. \tag{9}$$

Pour éviter des erreurs possibles, notons que les formes indiquées des solutions particulières (8) et (9) sont évidemment conservées aussi dans le cas où dans le second membre de l'équation (1) l'un des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est identiquement nul, c.-à-d. quand le second membre est de la forme

$$P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{ou} \quad Q(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Considérons ensuite un cas particulier important. Supposons que le second membre d'une équation linéaire du second ordre soit de la forme

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x, \tag{7'}$$

où M et N sont des constantes.

a) Si βi n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x. \tag{8'}$$

b) Si βi est racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = x\,(A \cos \beta x + B \sin \beta x). \tag{9'}$$

Notons que la fonction (7′) est un cas particulier de la fonction (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$) ; les fonctions (8′) et (9′) sont des cas particuliers des fonctions (8) et (9).

Exemple 4. Trouver l'intégrale générale de l'équation linéaire non homogène

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

Solution. L'équation caractéristique $k^2 + 2k + 5 = 0$ a pour racines $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$. L'intégrale générale de l'équation homogène correspondante s'écrit donc

$$\bar{y} = e^{-x}\,(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

A et B étant des constantes à déterminer.

Substituons y^* dans l'équation proposée, on a:

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Egalant les coefficients de $\cos x$ et de $\sin x$, on obtient deux équations pour déterminer A et B:

$$-A + 2B + 5A = 2; \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

d'où $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$.

La solution générale de l'équation proposée, $y = \bar{y} + y^*$, est

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Exemple 5. Résoudre l'équation

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Solution. Les racines de l'équation caractéristique sont $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; la solution générale de l'équation homogène est donc

$$\bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

On a:

$$y^{*\prime} = 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$y^{*\prime\prime} = -4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4(-A\sin 2x + B\cos 2x).$$

Substituons ces expressions des dérivées dans l'équation proposée et égalons les coefficients de $\cos 2x$ et de $\sin 2x$; on obtient un système d'équations pour la détermination de A et B:

$$4B = 1; \quad -4A = 0;$$

d'où $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$. L'intégrale générale de l'équation donnée est donc

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Exemple 6. Résoudre l'équation

$$y'' - y = 3e^{2x}\cos x.$$

Solution. Le second membre de l'équation est de la forme

$$f(x) = e^{2x}(M\cos x + N\sin x)$$

avec $M = 3$, $N = 0$. L'équation caractéristique $k^2 - 1 = 0$ a pour racines $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Comme $\alpha + i\beta = 2 + i\cdot 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = e^{2x}(A\cos x + B\sin x).$$

Substituant cette expression dans l'équation, on obtient après réduction de termes semblables:

$$(2A + 4B)\, e^{2x} \cos x + (-4A + 2B) e^{2x} \sin x = 3e^{2x} \cos x.$$

On obtient en égalant les coefficients de $\cos x$ et de $\sin x$:

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0,$$

d'où $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{3}{5}$. La solution particulière est donc

$$y^* = e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right),$$

et la solution générale

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right).$$

R e m a r q u e. Notons que tous les raisonnements de ce paragraphe s'appliquent à l'équation linéaire du premier ordre. Prenons, par exemple, une équation du premier ordre à coefficients constants (les équations de cette nature sont d'un usage courant dans les applications techniques)

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \tag{10}$$

où a et b sont des constantes. Cherchons tout d'abord la solution générale de l'équation homogène

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0.$$

L'équation caractéristique $k + a = 0$ a pour solution $k = -a$. Par suite, la solution de l'équation homogène est

$$\bar{y} = Ce^{-ax}.$$

Cherchons à présent la solution particulière y^* de l'équation non homogène sous la forme

$$y^* = B.$$

En substituant dans l'équation (10), nous obtenons

$$aB = b, \quad B = b/a.$$

Donc

$$y^* = b/a.$$

Et la solution générale de l'équation (10) est

$$y = \bar{y} + y^* \quad \text{ou encore} \quad y = Ce^{-ax} + b/a.$$

§ 25. Equations linéaires non homogènes d'ordre n

Soit l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, f(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes).

Supposons que l'on connaisse la solution générale

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{2}$$

de l'équation sans second membre

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{3}$$

Tout comme pour l'équation du second ordre, on a le théorème suivant.

Théorème. *Si $\bar{y}$ est la solution générale de l'équation homogène* (3) *et y^* une solution particulière de l'équation non homogène* (1),

$$Y = \bar{y} + y^*$$

est la solution générale de l'équation complète non homogène.

Par conséquent, tout comme pour l'équation du second ordre, l'intégration de l'équation (1) se ramène à la recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Ainsi que pour l'équation du second ordre, on peut trouver une solution particulière de l'équation (1) par la méthode de la variation des constantes en supposant que dans (2) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ soient des fonctions de x.

Formons le système d'équations (comparer § 23):

$$\left.\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n &= 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ce système d'équations avec pour inconnues $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ a une solution bien déterminée. (Le déterminant des coefficients de $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ est le déterminant de Wronski des solutions particulières $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation homogène, qui sont supposées linéairement indépendantes; il n'est donc pas nul.)

Le système (4) peut donc être résolu par rapport aux fonctions $C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Intégrons-les une fois trouvées:

$$C_1 = \int C_1' \, dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int C_2' \, dx + \bar{C}_2; \quad \ldots;$$
$$C_n = \int C_n' \, dx + \bar{C}_n,$$

où $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ sont des constantes d'intégration. Montrons que l'expression

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{5}$$

est la solution générale de l'équation complète (1).

Dérivons l'expression (5) n fois en tenant compte chaque fois des égalités (4); on aura alors:

$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$
$$y^{*\prime} = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{*(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)},$$
$$y^{*(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + f(x).$$

Multiplions la première équation par a_n, la seconde par a_{n-1}, ..., l'avant-dernière par a_1 et ajoutons, on obtient

$$y^{*(n)} + a_1y^{*(n-1)} + \ldots + a_ny^* = f(x),$$

étant donné que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des solutions particulières de l'équation homogène et que, par conséquent, les sommes obtenues en ajoutant les termes d'une même colonne sont nulles.

Par conséquent, la fonction $y^* = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ [où $C_1, \ldots, C_n$ sont des fonctions de x déterminées par les équations (4)] est une solution de l'équation non homogène (1). Elle contient n constantes arbitraires $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$. On démontre, comme pour une équation du second ordre, que c'est la solution générale.

La proposition est ainsi démontrée.

Il est parfois plus facile de trouver des solutions particulières d'une équation non homogène d'ordre n à coefficients constants (cf. § 24). Il en est ainsi lorsque:

I. Supposons que le second membre de l'équation différentielle soit de la forme $f(x) = P(x)\,e^{\alpha x}$, $P(x)$ étant un polynôme en x; il convient de distinguer deux cas:

a) si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = Q(x)\,e^{\alpha x},$$

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$, mais avec des coefficients indéterminés;

b) si α est racine d'ordre de multiplicité μ de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = x^{\mu}Q(x)\,e^{\alpha x},$$

$Q(x)$ étant un polynôme de même degré que $P(x)$.

II. Supposons le second membre de la forme

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,$$

où M et N sont des constantes. On détermine alors la solution particulière comme suit:

a) si βi n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière est de la forme

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

où A et B sont des coefficients constants indéterminés;

b) si βi est racine d'ordre de multiplicité μ de l'équation caractéristique, on a

$$y^* = x^\mu (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

III. Soit

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes en x. On a:

a) si $\alpha + \beta i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

où $U(x)$ et $V(x)$ sont des polynômes dont le degré est égal au degré le plus élevé de $P(x)$ et de $Q(x)$;

b) si $\alpha + \beta i$ est racine d'ordre de multiplicité μ de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y^* = x^\mu [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

où $U(x)$ et $V(x)$ ont la même signification que pour le cas a).

Remarque générale concernant les cas II et III. Si le second membre de l'équation contient seulement $\cos \beta x$ ou $\sin \beta x$, il faudra quand même chercher une solution sous la forme indiquée, c.-à-d. avec un sinus et un cosinus. En d'autres termes, du fait que le second membre ne contient pas $\cos \beta x$ ou $\sin \beta x$ il ne résulte nullement que la solution particulière ne contient pas ces fonctions. On a pu s'en convaincre en considérant les exemples 4, 5, 6 du paragraphe précédent et on le verra sur l'exemple 2 de ce paragraphe.

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - y = x^3 + 1.$$

Solution. L'équation caractéristique $k^4 - 1 = 0$ a pour racines

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Trouvons la solution générale de l'équation homogène (voir ex. 4, § 22)

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

On prendra une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Dérivons y^* quatre fois et substituons les expressions obtenues dans l'équation donnée, on obtient:

$$-A_0x^3 - A_1x^2 - A_2x - A_3 = x^3 + 1.$$

Egalons les coefficients des mêmes puissances de x, on a:

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Par conséquent,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

On trouve l'intégrale générale de l'équation complète sous la forme $y = \overline{y} + y^*$, soit

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Exemple 2. Résoudre l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 5 \cos x.$$

Solution. L'équation caractéristique $k^4 - 1 = 0$ a pour racines $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Le second membre de l'équation proposée est de la forme

$$f(x) = M \cos x + N \sin x,$$

avec $M = 5$, $N = 0$.

Comme i est une racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

On trouve en substituant cette expression dans l'équation:

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

d'où

$$4A = 0, \quad -4B = 5$$

ou $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$. La solution particulière de l'équation différentielle proposée est donc

$$y^* = -\frac{5}{4} x \sin x$$

et la solution générale

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x.$$

§ 26. Equations différentielles d'oscillations mécaniques

L'objet de ce paragraphe et des paragraphes suivants est l'étude d'un problème de mécanique appliquée au moyen d'équations différentielles linéaires.

Considérons une masse Q posée sur un ressort à boudin (fig. 274). Soit y l'écart de cette masse à sa position d'équilibre. L'écart vers le bas sera considéré comme positif, l'écart vers le haut sera négatif.

Dans la position d'équilibre la force de pesanteur agissant sur la masse est compensée par l'élasticité du ressort. Supposons que la force de rappel soit proportionnelle à l'écart, c.-à-d. qu'elle s'exprime par $-ky$, où k est une constante donnée appelée la « rigidité » du ressort *).

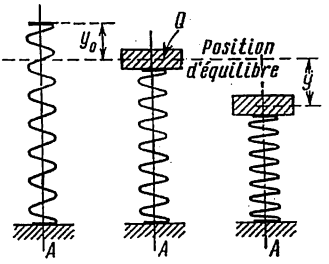


Fig. 274

Supposons qu'il s'oppose au mouvement de la masse Q une force de résistance proportionnelle à la vitesse du mouvement par rapport au point le plus bas du ressort, c.-à-d. une force $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, où $\lambda = \text{const} > 0$ (un amortisseur). Ecrivons l'équation différentielle du mouvement. On a en vertu de la seconde loi de Newton

$$Q\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

(k et λ sont des nombres positifs). Nous avons obtenu une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Ecrivons-la sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \tag{1'}$$

avec

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}.$$

Supposons en outre que le point inférieur du ressort effectue un mouvement vertical obéissant à la loi $z = \varphi(t)$. Tel est le cas si le

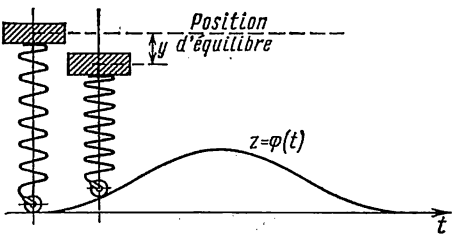


Fig. 275

ressort est fixé par son extrémité inférieure à un rouleau décrivant un contour donné (fig. 275).

*) Un ressort dont la force de rappel est proportionnelle à la déformation est dit à « caractéristique linéaire ».

La force de rappel sera alors non pas $-ky$ mais $-k\,[y+\varphi(t)]$, la force de résistance sera $-\lambda\,[y'+\varphi'(t)]$ et on obtient au lieu de l'équation (1)

$$Q\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+ky=-k\varphi(t)-\lambda\varphi'(t) \tag{2}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(t), \tag{2'}$$

où l'on a posé

$$f(t)=-\frac{k\varphi(t)+\lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Nous avons obtenu une équation différentielle du second ordre avec second membre.

L'équation (1') est appelée équation des *oscillations libres*, l'équation (2') est celle des *oscillations forcées*.

§ 27. Oscillations libres. Représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques

Considérons d'abord l'équation des oscillations libres

$$y''+py'+qy=0 \quad (p>0,\ q>0,\ \text{voir § 26}). \tag{1}$$

Ecrivons l'équation caractéristique correspondante

$$k^2+pk+q=0$$

et trouvons ses racines :

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,; \quad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

1) Soit $\frac{p^2}{4}>q$. Les racines k_1 et k_2 sont alors des nombres réels négatifs. La solution générale s'exprime par des exponentielles :

$$y=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t} \quad (k_1<0,\ k_2<0). \tag{2}$$

Il résulte de cette formule que l'élongation y tend asymptotiquement vers zéro lorsque $t\to\infty$, quelles que soient les conditions initiales. Il n'y a pas d'oscillations dans le cas donné, car la force de freinage est grande par rapport au coefficient de rigidité du ressort k.

2) Soit $\frac{p^2}{4}=q$; on a alors une racine double $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$. La solution générale s'écrit donc :

$$y=C_1e^{-\frac{p}{2}t}+C_2te^{-\frac{p}{2}t}=(C_1+C_2t)\,e^{-\frac{pt}{2}}. \tag{3}$$

Là encore l'élongation tend vers zéro lorsque $t\to\infty$, mais moins vite que dans le cas précédent (étant donné le facteur C_1+C_2t).

3) Soit $p=0$, c.-à-d. que l'on suppose le freinage absent.

L'équation (1) est alors de la forme

$$y'' + qy = 0. \tag{4}$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$k^2 + q = 0,$$

et elle a pour racines $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$, avec $\beta = \sqrt{q}$. La solution générale est

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t. \tag{5}$$

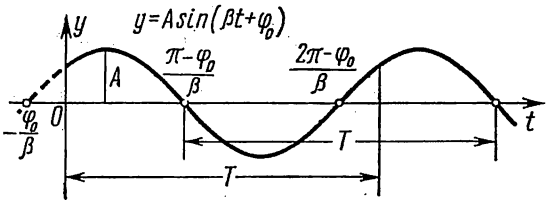


Fig. 276

Remplaçons dans cette formule les constantes arbitraires C_1 et C_2 par d'autres, A et φ_0, liées à C_1 et C_2 par les relations :

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

On tire de là A et φ_0 en fonction de C_1 et C_2 comme suit :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Substituant les expressions de C_1 et C_2 dans la formule (5), on obtient

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t$$

ou

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0). \tag{6}$$

De telles oscillations sont dites *harmoniques*. Les courbes intégrales sont des sinusoïdes. L'intervalle de temps T dans lequel la quantité $\beta t + \varphi_0$ varie de 2π est appelé *période* des oscillations ; dans notre cas $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Nous appellerons *fréquence* des oscillations le nombre d'oscillations dans le temps 2π ; dans notre cas la fréquence est β ; la constante A, qui représente l'élongation maximum à partir de la position d'équilibre, est appelée *amplitude* du mouvement oscillatoire ; φ_0 est la *phase initiale*. On a représenté le graphique de la fonction (6) sur la figure 276.

En électronique et ailleurs on fait largement appel aux représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques.

Considérons dans le plan complexe xOy le rayon vecteur $A = A(t)$ de longueur constante $|A| = A = \text{const}$.

Lorsque le paramètre t (t désigne ici le temps) varie, l'extrémité du vecteur A décrit un cercle de rayon A centré à l'origine des coordonnées (fig. 277). Soit ψ l'angle formé par le vecteur A et l'axe Ox et tel que $\psi = \beta t + \varphi_0$. La grandeur β est appelée vitesse angulaire de rotation du vecteur A. Projetons le vecteur A sur les axes Oy et Ox :

$$\left.\begin{aligned} y &= A\sin(\beta t + \varphi_0), \\ x &= A\cos(\beta t + \varphi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Les expressions (7) sont les solutions de l'équation (4).

Considérons la grandeur complexe

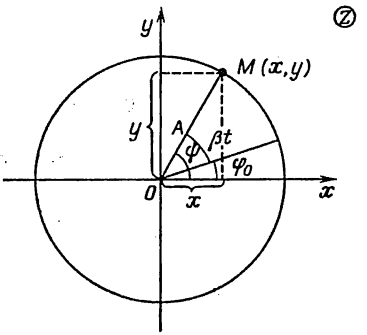


Fig. 277

$$z = x + iy = A\cos(\beta t + \varphi_0) + iA\sin(\beta t + \varphi_0)$$

ou encore

$$z = A[\cos(\beta t + \varphi_0) + i\sin(\beta t + \varphi_0)]. \qquad (8)$$

Comme nous l'avons vu au § 1, chap. VII, la grandeur complexe z (8) représente le vecteur A.

Par conséquent, les solutions de l'équation des oscillations harmoniques (4) peuvent être assimilées aux *projections sur les axes Oy et Ox du vecteur A ayant β pour vitesse angulaire et φ_0 pour phase initiale.*

En se référent à la formule d'Euler (cf. (4), § 5, chap. VII) on peut écrire l'expression (8) sous la forme :

$$z = Ae^{i(\beta t + \varphi_0)}.$$

Les parties imaginaire et réelle de l'expression (9) sont les solutions de l'équation (4). L'expression (9) est dite *solution complexe* de l'équation (4). Mettons l'expression (9) sous la forme

$$z = Ae^{i\varphi_0}e^{i\beta t}. \qquad (9)$$

L'expression $Ae^{i\varphi_0}$ porte le nom d'*amplitude complexe*. Désignons-la par A^*. La solution complexe (10) peut alors être mise sous la forme

$$z = A^* e^{i\beta t}.$$

4) Soit $p \neq 0$ et $\frac{p^2}{4} < q$.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors complexes:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

où

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

L'intégrale générale est de la forme

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \tag{12}$$

ou

$$y = Ae^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi_0). \tag{13}$$

Force nous est de prendre ici pour amplitude la quantité $Ae^{\alpha t}$ qui dépend du temps. Comme $\alpha < 0$, elle tend vers zéro lorsque

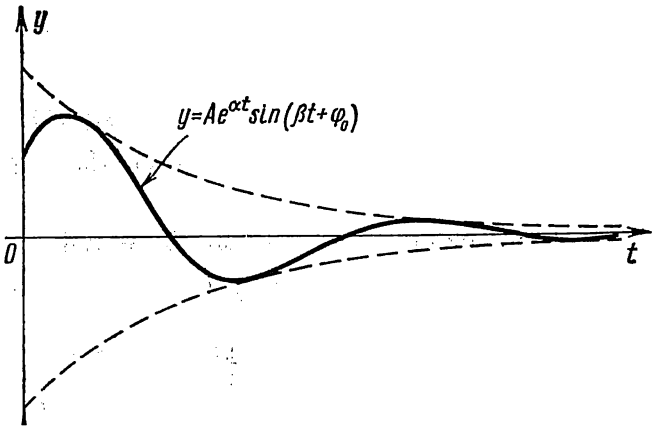


Fig. 278

$t \to \infty$, c.-à-d. que nous sommes en présence *d'oscillations amorties*. La figure 278 représente le graphique de telles oscillations.

§ 28. Oscillations forcées

L'équation des oscillations forcées s'écrit

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad (p > 0,\ q > 0, \text{ voir § 26}). \tag{1}$$

Considérons le cas important en pratique où la force perturbatrice extérieure est représentée par la fonction périodique

$$f(t) = a \sin \omega t;$$

l'équation (1) devient alors

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t. \tag{1'}$$

1) Supposons d'abord que $p \neq 0$ et $\frac{p^2}{4} < q$, c.-à-d. que les racines de l'équation caractéristique soient des nombres complexes $\alpha \pm i\beta$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors (voir formules (12) et (13), § 27)

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi_0). \tag{2}$$

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \tag{3}$$

Substituant cette expression de y^* dans l'équation différentielle initiale, on trouve M et N:

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \quad N = \frac{(q-\omega^2)\, a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Avant de substituer les expressions de M et N dans l'égalité (3), introduisons les nouvelles constantes A^* et φ^* en posant

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

soit

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

On pourra écrire alors la solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin (\omega t + \varphi^*)$$

ou, en définitive,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin (\omega t + \varphi^*).$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est égale à $y = \bar{y} - y^*$, soit

$$y = Ae^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin (\omega t + \varphi^*).$$

Le premier terme du second membre (la solution de l'équation homogène) représente des oscillations amorties. Il décroît lorsque t croît et, par conséquent, au bout d'un certain temps, c'est le second terme, représentant les oscillations forcées, qui joue le rôle principal. La fréquence ω de ces oscillations est égale à la fréquence de la force extérieure $f(t)$; l'amplitude des oscillations forcées est d'autant plus grande que p est petit et que ω^2 est voisin de q.

Etudions en détail la dépendance entre l'amplitude des oscillations forcées et la fréquence ω pour différentes valeurs de p. Désignons à cet effet l'amplitude des oscillations forcées par $D(\omega)$:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

Posons $q = \beta_1^2$ (pour $p = 0$ β_1 serait égal à la fréquence des oscillations propres). On a

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2}\frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Posons

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda; \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma,$$

où λ est le quotient de la fréquence de la force perturbatrice et de la fréquence des oscillations libres du système, la constante γ ne dépendant pas de la force perturbatrice. L'amplitude s'exprime alors par la formule

$$\overline{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2}}. \tag{4}$$

Trouvons le maximum de cette fonction. Il correspond évidemment à la valeur de λ pour laquelle le dénominateur est minimum. Mais le minimum de la fonction

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2} \tag{5}$$

est atteint pour

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

et est égal à

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Par conséquent, l'amplitude maximum est égale à

$$\overline{D}_{\max} = \frac{a}{\beta_1^2\gamma\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Le graphique de la fonction $\overline{D}(\lambda)$ pour divers γ est représenté sur la figure 279 (pour fixer les idées, on a posé pour la construction des courbes correspondantes $a = 1$, $\beta_1 = 1$). Ces courbes sont appelées *courbes de résonance*.

Il résulte de la formule (5) que pour des γ petits la valeur maximum de l'amplitude est atteinte pour des λ voisins de l'unité, c.-à-d. lorsque la fréquence de la force coercitive est voisine de la fréquence des oscillations libres. Si $\gamma = 0$ (donc $p = 0$), c.-à-d. s'il n'y a pas de résistance au mouvement, l'amplitude des oscillations forcées croît indéfiniment lorsque $\lambda \to 1$, c.-à-d. lorsque $\omega \to \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ (\gamma = 0)}} \overline{D}(\lambda) = \infty.$$

Lorsque $\omega^2 = q$, il y a résonance.

2) Supposons maintenant que l'on ait $p = 0$, c.-à-d. que nous considérerons l'équation d'oscillations élastiques sans résistance en présence d'une force coercitive périodique:

$$y'' + qy = a \sin \omega t. \tag{6}$$

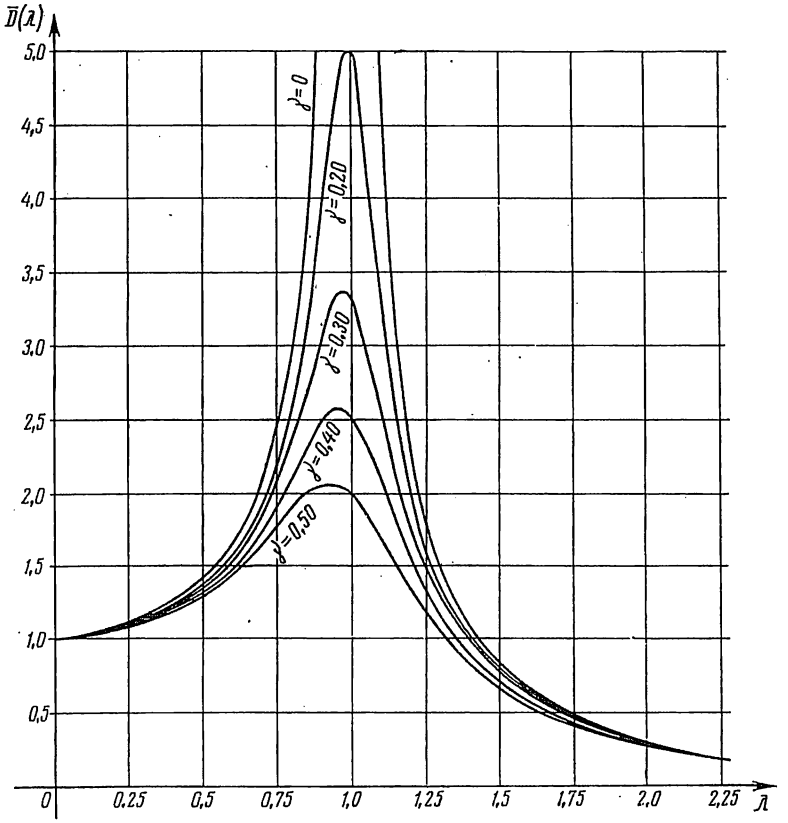


Fig. 279

La solution générale de l'équation homogène est

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (\beta^2 = q).$$

Si $\beta \neq \omega$, c.-à-d. si la fréquence de la force coercitive n'est pas égale à la fréquence des oscillations propres, la solution particulière de l'équation non homogène s'écrit

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t$$

On trouve en substituant cette expression dans l'équation proposée :

$$M=0, \quad N=\frac{a}{q-\omega^2}$$

La solution générale est

$$y=A\sin(\beta t+\varphi_0)+\frac{a}{q-\omega^2}\sin\omega t.$$

Le mouvement résulte donc de la superposition des oscillations propres de fréquence β et des oscillations forcées de fréquence ω.

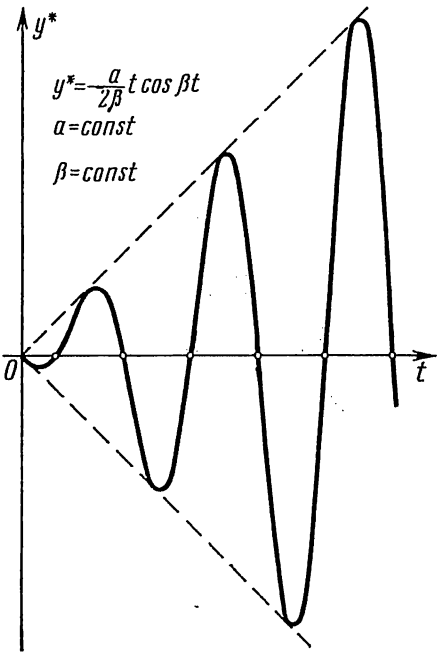


Fig. 280

Si $\beta=\omega$, c.-à-d. si la fréquence des oscillations propres coïncide avec la fréquence de la force coercitive, la fonction (3) n'est pas solution de l'équation (6). On cherchera alors, en vertu des résultats du § 24, une solution particulière sous la forme

$$y^*=t\,(M\cos\beta t+N\sin\beta t). \tag{7}$$

On trouve M et N en substituant cette expression dans l'équation différentielle :

$$M=-\frac{a}{2\beta}; \quad N=0.$$

Par conséquent,

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \beta t.$$

La solution générale est de la forme

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta} i \cos \beta t.$$

Le deuxième terme du second membre montre qu'alors l'amplitude des oscillations augmente indéfiniment lorsque $t \to \infty$. Ce phénomène, qui a lieu lorsque la fréquence des oscillations propres du système et la fréquence de la force coercitive coïncident, est appelé *résonance*.

Le graphique de la fonction y^* est représenté sur la figure 280.

§ 29. Systèmes d'équations différentielles ordinaires

Dans la résolution d'un grand nombre de problèmes, on demande de trouver des fonctions $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ satisfaisant à un système d'équations différentielles qui contiennent la variable x, les fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et leurs dérivées.

Considérons le système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les fonctions inconnues et x la variable.

Un tel système, résolu par rapport aux dérivées premières, est appelé *système normal*.

Intégrer ce système, c'est déterminer les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifiant les équations (1) et satisfaisant aux conditions initiales données :

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \quad \ldots, \quad (y_n)_{x=x_0} = y_{n0}. \qquad (2)$$

On intègre le système (1) comme suit.

Dérivons la première des équations (1) par rapport à x :

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Remplaçons les dérivées $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ par leurs expressions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tirées de (1), on obtient l'équation

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Dérivant l'équation obtenue et procédant de la même manière, on trouve :

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Continuant ainsi, on trouve en définitive

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

On tire des $n-1$ premières équations $y_2, y_3, \ldots, y_n$ en les exprimant en fonction de x, y_1 et des dérivées $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$;

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, y, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Substituant ces expressions dans la dernière équation (3), on obtient une équation du n-ième ordre portant sur y_1 :

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \quad (5)$$

On détermine y_1 en résolvant cette expression :

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \quad (6)$$

Dérivons cette expression $n-1$ fois ; on trouve les dérivées $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ comme fonctions de $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Substituons ces fonctions dans les équations (4), on détermine $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Pour que la solution obtenue satisfasse aux conditions initiales données (2), il ne reste plus qu'à déterminer dans (6) et (7) les valeurs des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (comme on l'a fait dans le cas d'une seule équation différentielle).

Remarque 1. Si le système (1) est linéaire par rapport aux fonctions inconnues, l'équation (5) sera aussi linéaire.

Exemple 1. Intégrer le système :

$$\frac{dy}{dx}=y+z+x, \quad \frac{dz}{dx}=-4y-3z+2x \tag{a}$$

avec les conditions initiales

$$(y)_{x=0}=1, \quad (z)_{x=0}=0. \tag{b}$$

Solution. 1) On a en dérivant par rapport à x la première équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1.$$

On obtient en substituant dans cette dernière les expressions $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ tirées des équations (a) :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y+z+x)+(-4y-3z+2x)+1$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1. \tag{c}$$

2) On déduit de la première équation (a)

$$z=\frac{dy}{dx}-y-x. \tag{d}$$

Substituons cette expression dans (c), on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2\left(\frac{dy}{dx}-y-x\right)+3x+1$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=5x+1. \tag{e}$$

La solution générale de cette ernière est

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9 \tag{f}$$

et compte tenu de (d)

$$z=(C_2-2C_1-2C_2x)\,e^{-x}-6x+14. \tag{g}$$

Choisissons les constantes C_1 et C_2 de manière à satisfaire aux conditions initiales (b)

$$(y)_{x=0}=1, \quad (z)_{x=0}=0.$$

On déduit alors des égalités (f) et (g)

$$1=C_1-9, \; 0=C_2-2C_1+14,$$

d'où $C_1=10$; $C_2=6$.

Par conséquent, la solution satisfaisant aux conditions initiales (b) s'écrit

$$y = (10 + 6x)\, e^{-x} + 5x - 9, \quad z = (-14 - 12x)\, e^{-x} - 6x + 14.$$

Remarque 2. Nous avons supposé dans les raisonnements précédents que l'on pouvait tirer les fonctions $y_2, y_3, \ldots, y_n$ des $n - 1$ premières équations (3). Mais on peut parfois tirer $y_2, \ldots, y_n$ de moins de n équations. On obtient alors pour déterminer y une équation différentielle d'ordre inférieur à n.

Exemple 2. Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{dy}{dt} = x + z; \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Solution. On trouve en dérivant par rapport à t la première équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x + z) + (x + y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z.$$

Eliminons les variables y et z des équations

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

on obtient une équation du second ordre par rapport à x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière est

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{α}$$

D'où

$$\frac{dx}{dt} = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad \text{et} \quad y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z. \tag{β}$$

Substituant les expressions ci-dessus de x et y dans la troisième équation du système proposé, on obtient une équation permettant de déterminer z :

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}.$$

On trouve en intégrant cette équation :

$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{γ}$$

Mais on a alors en vertu de (β) :

$$y = -(C_1 + C_3)\, e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{δ}$$

Les équations (α), (β), (γ) donnent la solution générale du système proposé.

Il se peut que les équations différentielles d'un système contiennent des dérivées d'ordres supérieurs à un. L'ordre du système considéré s'élève en conséquence.

Ainsi, le problème du mouvement d'un point matériel sollicité par une force $\boldsymbol{F}$ se ramène à un système de trois équations différentielles du second ordre.

Soient F_x, F_y, F_z les projections de la force $\boldsymbol{F}$ sur les axes de coordonnées. La position du point à chaque instant t est définie par ses coordonnées x, y, z. Il en résulte que x, y, z sont des fonctions de t. Les projections du vecteur vitesse du point matériel sur les trois axes sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Supposons que la force $\boldsymbol{F}$ et, par conséquent, ses projections F_x, F_y, F_z dépendent du temps t, de la position x, y, z et de la vitesse $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Les fonctions que l'on cherche dans ce problème sont

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

On les détermine à partir des équations de la dynamique (loi de Newton) :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nous avons obtenu un système de trois équations différentielles du second ordre. Si le mouvement est plan, c.-à-d. si la trajectoire est une courbe plane (par exemple du plan Oxy), on obtient un système de deux équations pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right). \tag{10}$$

On peut résoudre un système d'équations différentielles d'ordre n en le ramenant à un système d'équations du premier ordre. Montrons comment on procède sur l'exemple des équations (9), et (10). Introduisons les notations:

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v.$$

On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Le système de deux équations du second ordre (9), (10) à deux fonctions inconnues $x(t)$ et $y(t)$ est remplacé par un système de quatre équations du premier ordre avec quatre fonctions inconnues x, y, u, v:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, \\ \frac{dy}{dt} &= v, \\ m\frac{du}{dt} &= F_x(t, x, y, u, v), \\ m\frac{dv}{dt} &= F_y(t, x, y, u, v). \end{aligned}$$

Indiquons pour terminer que la méthode générale examinée de résolution de systèmes d'équations différentielles peut être remplacée, dans certains cas concrets, par des procédés artificiels permettant d'arriver plus rapidement au but.

Exemple 3. Trouver la solution générale du système d'équations différentielles

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z,$$
$$\frac{d^2z}{dx^2}=y.$$

Solution. Dérivons deux fois par rapport à x les deux membres de la première équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2z}{dx^2}$$

Or, $\frac{d^2z}{dx^2}=y$, donc on obtient l'équation du quatrième ordre

$$\frac{d^4y}{dx^4}=y.$$

On obtient par intégration la solution générale de cette équation (voir § 22, exemple 4) :

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Tirons $\frac{d^2y}{dx^2}$ de cette équation et reportons-la dans la première équation du système proposé ; on détermine z :

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x.$$

§ 30. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit donné le système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

où les coefficients a_{ij} sont constants. Ici t désigne la variable indépendante, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ les fonctions inconnues. Le système (1) est appelé *système d'équations différentielles homogènes à coefficients constants.*

Comme nous l'avons indiqué dans le précédent paragraphe, ce système peut être résolu en le ramenant à une équation du n-ième ordre qui dans le cas présent sera linéaire (nous l'avons déjà noté

dans la remarque 1 du précédent paragraphe). Or le système (1) peut également être résolu par une autre méthode, sans le ramener à une équation du n-ième ordre. Cette méthode permet d'analyser plus concrètement le caractère des solutions.

Nous rechercherons la solution particulière du système sous la forme suivante :

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{2}$$

On doit déterminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et k de sorte que les fonctions $\alpha_1 e^{kt}, \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \alpha_n e^{kt}$ vérifient le système d'équations (1). En les portant dans le système (1), nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} k\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\, e^{kt}. \end{aligned}\right\}$$

Simplifions par e^{kt}. Rapportant tous les termes dans le premier membre et mettant en évidence les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nous obtenons le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\,\alpha_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Choisissons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et k de manière que soit vérifié le système (3). Ce système est un système linéaire d'équations algébriques par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Formons le déterminant du système (3) :

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - k) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Si k est tel que le déterminant Δ est différent de zéro, le système (3) ne possède qu'une solution nulle $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, et par conséquent les formules (2) ne donnent que les solutions triviales :

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) \equiv 0.$$

Ainsi, nous ne pourrons obtenir des solutions non triviales (2) que pour les valeurs de k pour lesquelles le déterminant (4) s'annule.

Nous obtenons une équation du n-ième degré pour déterminer k:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Cette équation est appelée *équation caractéristique* du système (1), ses racines sont appelées *racines de l'équation caractéristique.*

Considérons quelques cas.

I. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes. Désignons par $k_1, k_2, \dots, k_n$ les racines de l'équation caractéristique. Pour chaque racine k_i écrivons le système (3) et déterminons les coefficients

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}.$$

On peut montrer que l'un d'entre eux est arbitraire; on peut l'estimer égal à l'unité. Nous obtenons ainsi:

pour la racine k_1 la solution du système (1)

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \dots, x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t},$$

pour la racine k_2 la solution du système (1)

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \dots, x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

pour la racine k_n la solution du système (1)

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \dots, x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

On peut se convaincre par substitution directe dans les équations que le système de fonctions

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 &= C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont des constantes arbitraires, est la solution du système d'équations différentielles (1). C'est la *solution générale du système* (1). On montre aisément que l'on peut trouver pour les constantes des valeurs telles que la solution vérifie les conditions initiales données.

Exemple 1. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

ou $k^2-5k+4=0$. Nous trouvons les racines

$$k_1=1, \qquad k_2=4.$$

Recherchons la solution sous la forme

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^t, \qquad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^t$$

et

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Composons le système (3) pour la racine $k_1=1$ et déterminons $\alpha_1^{(1)}$ et $\alpha_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned} (2-1)\,\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0, \\ 1\alpha_1^{(1)}+(3-1)\,\alpha_2^{(1)}=0 \end{aligned}\right\}$$

ou

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0, \\ \alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0, \end{aligned}$$

d'où $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Posant $\alpha_1^{(1)}=1$ nous obtenons $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$. Nous avons ainsi obtenu la solution du système :

$$x_1^{(1)}=e^t, \qquad x_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^t.$$

Composons ensuite le système (3) pour la racine $k_2=4$ et déterminons $\alpha_1^{(2)}$ et $\alpha_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned} -2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0, \\ \alpha_1^{(2)}-\alpha_2^{(2)}=0, \end{aligned}$$

d'où $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}$ et $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$. Nous obtenons la seconde solution du système

$$x_1^{(2)}=e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=e^{4t}.$$

La solution générale du système sera [voir (6)]

$$\begin{aligned} x_1&=C_1e^t+C_2e^{4t}, \\ x_2&=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}. \end{aligned}$$

II. Les racines de l'équation caractéristique sont distinctes, mais certaines d'entre elles sont complexes. Supposons que parmi les racines de l'équation caractéristique existent deux racines complexes conjuguées :

$$k_1=\alpha+i\beta, \quad k_2=\alpha-i\beta.$$

A ces racines correspondront les solutions

$$x_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (j=1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

$$x_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Les coefficients $\alpha_j^{(1)}$ et $\alpha_j^{(2)}$ sont déterminés à partir du système d'équations (3).

De même qu'au § 21 on peut montrer que les parties réelles et imaginaires de la solution complexe sont aussi des solutions. Nous obtenons ainsi deux solutions particulières:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t}(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x + \lambda_j^{(2)}\sin\beta x), \\ \overline{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t}(\overline{\lambda}_j^{(1)}\sin\beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)}\cos\beta x), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$ sont des nombres réels définis au moyen de $\alpha_j^{(1)}$ et $\alpha_j^{(2)}$.

Les combinaisons correspondantes des fonctions (9) entreront dans la solution générale du système.

Exemple 2. Trouver la solution générale du système

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2.$$

Solution. Nous formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ou $k^2+12k+37=0$ et nous trouvons ses racines:

$$k_1 = -6+i, \quad k_2 = -6-i.$$

Portant $k_1 = -6+i$ dans le système (3) nous trouvons:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1+i,$$

Ecrivons la solution (7):

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{(-6+i)t}. \tag{7'}$$

Portant $k_2 = -6-i$ dans le système (3), nous trouvons:

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1-i.$$

Nous obtenons le second système de solutions (8):

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)\,e^{(-6-i)t}. \tag{8'}$$

Récrivons la solution (7'):

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i\sin t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{-6t}(\cos t + i\sin t)$$

ou

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\sin t,$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Récrivons la solution (8'):

$$x_1^{(2)} = e^{-6t}\cos t - ie^{-6t}\sin t,$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) - ie^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Nous pouvons choisir comme système de solutions particulières séparément les parties réelles et imaginaires

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= e^{-6t}\cos t, & \bar{x}_2^{(1)} &= e^{-6t}(\cos t - \sin t), \\ \bar{x}_1^{(2)} &= e^{-6t}\sin t, & \bar{x}_2^{(2)} &= e^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

La solution générale du système sera :

$$x_1 = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t,$$
$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

On peut trouver par une méthode analogue la solution d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordres supérieurs à coefficients constants.

En mécanique et en théorie des circuits électriques on étudie, par exemple, la solution du système d'équations différentielles du deuxième ordre

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Nous recherchons de nouveau la solution sous la forme

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}$$

Portant ces expressions dans le système (10) et simplifiant par e^{kt}, nous obtenons un système d'équations pour déterminer α, β et k:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - k^2)\,\alpha + a_{12}\beta &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\,\beta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Les valeurs α et β ne seront différentes de zéro que dans le cas où le déterminant du système sera égal à zéro :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

C'est précisément l'équation caractéristique pour le système (10); c'est une équation du 4-ième ordre par rapport à k. Soient k_1, k_2, k_3 et k_4 ses racines (nous supposons que les racines sont distinctes). Pour chaque racine k_i du système (11) nous trouvons les valeurs α et β. La solution générale analogue à (6) sera de la forme

$$x = C_1\alpha^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha^{(2)}e^{k_2t} + C_3\alpha^{(3)}e^{k_3t} + C_4\alpha^{(4)}e^{k_4t},$$
$$y = C_1\beta^{(1)}e^{k_1t} + C_2\beta^{(2)}e^{k_2t} + C_3\beta^{(3)}e^{k_3t} + C_4\beta^{(4)}e^{k_4t}.$$

Si certaines des racines sont complexes, à chaque paire de racines complexes correspondra dans la solution générale une expresson du type (9).

Exemple 3. Trouver la solution générale du système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x-4y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-x+y.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique (12) et trouvons ses racines :

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix}=0,$$

$$k_1=i,\quad k_2=-i,\quad k_3=\sqrt{3},\quad k_4=-\sqrt{3}.$$

Nous rechercherons la solution sous la forme

$$x^{(1)}=\alpha^{(1)}e^{it},\qquad y^{(1)}=\beta^{(1)}e^{it},$$
$$x^{(2)}=\alpha^{(2)}e^{-it},\qquad y^{(2)}=\beta^{(2)}e^{-it},$$
$$x^{(3)}=\alpha^{(3)}e^{\sqrt{3}t},\qquad y^{(3)}=\beta^{(3)}e^{\sqrt{3}t},$$
$$x^{(4)}=\alpha^{(4)}e^{-\sqrt{3}t},\qquad y^{(4)}=\beta^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}.$$

Nous tirons du système (11) $\alpha^{(j)}$ et $\beta^{(j)}$:

$$\alpha^{(1)}=1,\qquad \beta^{(1)}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha^{(2)}=1,\qquad \beta^{(2)}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha^{(3)}=1,\qquad \beta^{(3)}=-\frac{1}{2},$$

$$\alpha^{(4)}=1,\qquad \beta^{(4)}=-\frac{1}{2}.$$

Ecrivons les solutions complexes :

$$x^{(1)}=e^{it}=\cos t+i\sin t,$$
$$x^{(2)}=e^{-it}=\cos t-i\sin t,$$
$$y^{(1)}=\frac{1}{2}(\cos t+i\sin t),$$
$$y^{(2)}=\frac{1}{2}(\cos t-i\sin t).$$

Les parties réelles et imaginaires prises séparément seront aussi des solutions :

$$\overline{x}^{(1)}=\cos t,\qquad \overline{y}^{(1)}=\frac{1}{2}\cos t,$$

$$\overline{x}^{(2)}=\sin t,\qquad \overline{y}^{(2)}=\frac{1}{2}\sin t.$$

Nous pouvons maintenant écrire la solution générale :

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{\sqrt{3}t} + C_4 e^{-\sqrt{3}t},$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 \cos t + \frac{1}{2} C_2 \sin t - \frac{1}{2} C_3 e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{2} C_4 e^{-\sqrt{3}t}.$$

Remarque. Nous n'avons pas considéré dans ce paragraphe le cas des racines multiples de l'équation caractéristique.

§ 31. Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier

Comme les solutions de la plupart des équations différentielles et des systèmes d'équations ne s'expriment pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratures, on a recours également à des méthodes d'intégration approchée. On a donné une idée de ces méthodes au § 3; en outre, plusieurs de ces méthodes seront examinées aux §§ 32-35 et aussi au chapitre XVI.

Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière; pour obtenir d'autres solutions particulières, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

En maints problèmes de mécanique et de technique, il importe de connaître non pas les valeurs concrètes de la solution correspondant à des valeurs concrètes de la variable, mais l'allure de la solution lorsque la variable varie, notamment lorsqu'elle tend vers l'infini. Il est, par exemple, important de savoir si les solutions satisfaisant à des conditions initiales données sont périodiques ou si elles tendent asymptotiquement vers une fonction connue, etc. La théorie qualitative des équations différentielles a ces questions pour objet.

La question de la stabilité d'une solution ou d'un mouvement est une des questions fondamentales de la théorie qualitative; cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Liapounov (1857-1918).

Soit le système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ les solutions de ce système satisfaisant aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Soient encore $\bar{x}=\bar{x}(t)$ et $\bar{y}=\bar{y}(t)$ les solutions du système (1) satisfaisant aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_{t=0}&=\bar{x}_0,\\ \bar{y}_{t=0}&=\bar{y}_0.\end{aligned}\right\} \qquad (1'')$$

Définition. Les solutions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ satisfaisant aux équations (1) et aux conditions initiales (1') sont dites *stables*

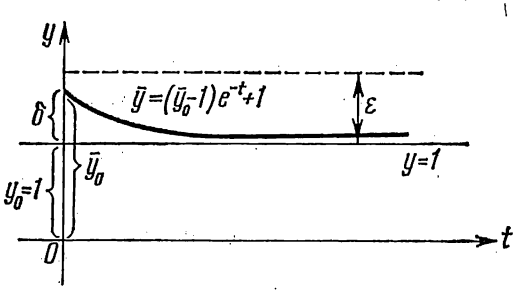


Fig. 281

au sens de Liapounov lorsque $t \to \infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait pour tout $t > 0$ les inégalités

$$\left.\begin{aligned}|\bar{x}(t)-x(t)|&<\varepsilon,\\ |\bar{y}(t)-y(t)|&<\varepsilon,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dès que les conditions initiales satisfont aux inègalités

$$\left.\begin{aligned}|\bar{x}_0-x_0|&<\delta,\\ |\bar{y}_0-y_0|&<\delta.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Interprétons cette définition. Il résulte des inégalités (2) et (3) que les solutions varient peu, quel que soit t positif, lorsque les conditions initiales varient peu. Si le système d'équations différentielles est celui d'un mouvement, le caractère du mouvement varie peu lorsque les conditions initiales varient peu si les solutions sont stables.

Voyons-le sur l'exemple d'une équation du premier ordre. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt}=-y+1. \qquad (a)$$

Sa solution générale est

$$y = Ce^{-t} + 1. \qquad (b)$$

Trouvons la solution particulière satisfaisant à la condition initiale

$$y_{t=0} = 1. \qquad (c)$$

Il est évident que cette solution $y = 1$ correspond à $C = 0$ (fig. 281). Trouvons ensuite la solution particulière satisfaisant à la condition initiale

$$\bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0.$$

Trouvons la valeur de C dans l'équation (b):

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

d'où

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

On obtient en substituant cette valeur de C dans l'égalité (b)

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1.$$

Il est évident que la solution $y = 1$ est stable. En effet

$$\bar{y} - y = [(y_0 - 1)\, e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} \to 0$$

lorsque $t \to \infty$.

L'inégalité (3) est donc vérifiée quel que soit ε dès que l'on a

$$(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon.$$

Si les équations (1) décrivent le mouvement, où l'argument t est le temps, et qu'elles ne contiennent pas explicitement le temps t, c'est-à-dire si elles ont la forme

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y),$$

un tel systeme est dit *autonome*.

Considérons ensuite le système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

en supposant que les coefficients a, b, c, g soient des constantes. La substitution directe nous convainc que la solution du système (4) est alors $x = 0$, $y = 0$.

Voyons à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients pour que la solution $x = 0$, $y = 0$ du système (4) soit stable.

Dérivons la première équation et éliminons y et $\frac{dy}{dt}$, on obtient une équation du second ordre:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c\frac{dx}{dt} + g\frac{dy}{dt} = c\frac{dx}{dt} + g(ax + by) = c\frac{dx}{dt} + agx + b\left(\frac{dx}{dt} - cx\right)$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b + c)\frac{dx}{dt} - (ag - bc)\, x = 0. \qquad (5)$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ag - bc) = 0. \tag{6}$$

Cette équation est notée habituellement sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & g \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

(cf. équation (4), § 30).

Désignons les racines de l'équation caractéristique par λ_1 et λ_2. Comme nous allons le voir, la stabilité (ou l'instabilité) des solutions du système (4) est déterminée par la nature des racines λ_1 et λ_2. Les cas suivants peuvent se présenter.

1. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, négatives et distinctes:

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

On trouve x de l'équation (5):

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

De la première équation du système (4), on déduit alors y. La solution du système (4) prend ainsi la forme:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}]\frac{1}{g}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Remarque. Si $g = 0$ et $a \neq 0$, il faut alors écrire l'équation (5) pour la fonction y. De la deuxième équation du système (4) on déduit y et ensuite x. La structure de la solution (8) ne change pas. Si $g = 0$ et $a = 0$, la solution du système d'équations s'écrit sous la forme:

$$x = C_1 e^{ct}, \quad y = C_2 e^{bt}. \tag{8'}$$

Dans ce cas il est plus facile d'analyser le caractère des solutions. Donnons à C_1 et C_2 des valeurs telles que les solutions (8) satisfassent aux conditions initiales

$$x\,|_{t=0} = x_0, \quad y\,|_{t=0} = y_0.$$

La solution vérifiant les conditions initiales est donc:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Il résulte de ces dernières formules que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits tels que l'on ait

pour tous les $t > 0$:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad \text{étant donné que } e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ et } e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Notons que dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \\ &\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Considérons le plan xOy. Ce plan porte le nom de *plan de phase* du système d'équations différentielles (4) et de l'équation différentielle (5). Considérons les solutions (8) et (9) du système (4) comme les équations paramétriques d'une certaine courbe dans le plan de phase xOy:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{\varphi}(t, C_1, C_2), \\ y &= \bar{\psi}(t, C_1, C_2), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, x_0, y_0), \\ y &= \psi(t, x_0, y_0). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ces courbes sont appelées *courbes intégrales* ou *trajectoires* de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+gy} \tag{13}$$

obtenue en divisant membre à membre les équations du système (4).

L'origine des coordonnées O (0, 0) est un *point singulier* pour l'équation différentielle (13) puisqu'il n'appartient pas au domaine d'existence et d'unicité de la solution.

Le caractère des solutions (9) et plus généralement des solutions du système (4) est illustré concrètement par la disposition des courbes intégrales

$$\bar{F}(x, y, C) = 0$$

qui forment l'intégrale générale de l'équation différentielle (13). La constante C est tirée de la condition initiale $y_{x=x_0} = y_0$. Après substitution de C l'équation de la famille prend la forme

$$F(x, y, x_0, y_0). \tag{14}$$

Dans le cas des solutions (9) le point singulier porte le nom de *nœud stable*. On dit qu'un point se déplaçant sur la trajectoire tend indéfiniment vers le point singulier si $t \to +\infty$.

Il est évident qu'on aboutirait également à la relation (14) en éliminant le paramètre t du système (12). Pour déterminer comment, dans le plan de phase, sont disposées les courbes intégrales

au voisinage du point singulier pour toutes les racines possibles de l'équation caractéristique, au lieu d'une analyse complète, bornons-nous à une illustration sur des cas simples ne nécessitant pas des calculs compliqués. Précisons que les trajectoires de l'équation (13) et celles qui seront étudiées dans ces exemples auront la même allure au voisinage de l'origine des coordonnées quels que soient les coefficients.

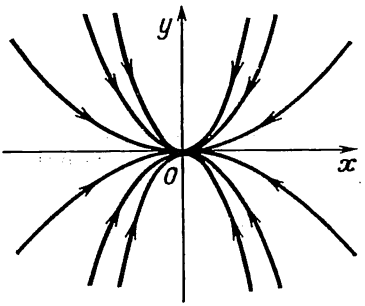


Fig. 282

Exemple 1. Etudier la stabilité de la solution $x = 0$, $y = 0$ du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y.$$

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines

$$\lambda_1 = 1. \quad \lambda_2 = -2.$$

Les solutions (8') sont dans ce cas

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-2t}.$$

Les solutions (9)

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t}. \tag{a}$$

Il est évident que lorsque $t \to +\infty$ $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$. La solution $x = 0$, $y = 0$ est donc stable. Voyons maintenant le plan de phase. En éliminant le paramètre t de l'équation (a) nous obtenons une équation de la forme (14)

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}. \tag{b}$$

C'est une famille de paraboles (fig. 282).

L'équation (13) s'écrit dans ce cas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Nous obtenons en intégrant

$$\operatorname{Log} |y| = 2 \operatorname{Log} |x| + \operatorname{Log} |C|,$$

$$y = Cx^2. \tag{c}$$

Tirons C des conditions

$$y_{x=x_0} = y_0, \quad C = \frac{y_0}{x_0^2}.$$

En substituant C dans (c) nous obtenons la solution (b). Le point singulier O (0, 0) est un *nœud stable*.

II. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, positives et distinctes: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Dans ce cas les solutions sont données également par les formules (8) et respectivement (9). Ici cependant pour $|x_0|$ et $|y_0|$ aussi petits qu'on veut $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$, étant donné que $e^{\lambda_1 t} \to \infty$ et $e^{\lambda_2 t} \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$. Sur le plan de phase le point singulier sera un *nœud instable*: en effet, lorsque $t \to +\infty$, un point qui se déplace sur la trajectoire s'éloigne du point de repos $x = 0$, $y = 0$.

Exemple 2. Etudier la stabilité des solutions du système

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y.$$

Solution. L'équation caractéristique sera

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

ses racines

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2,$$

et la solution du système

$$x = x_0 e^t, \qquad y = y_0 e^{2t}.$$

Cette solution est instable car $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$. Eliminons t:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

(fig. 283). Le point singulier $O(0, 0)$ est un *nœud instable*.

III. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et de signes contraires, par exemple $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Il résulte de la formule (9) que pour $|x_0|$ et $|y_0|$ aussi petits qu'on veut, si $cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0$, $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$. La solution est *instable*. Dans le plan de phase le point singulier porte le nom de *selle*.

Exemple 3. Etudier la stabilité de la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = -2y.$$

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

par suite, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. La solution est

$$x = x_0 e^{+t}, \quad y = y_0 e^{-2t}.$$

La solution est instable. En éliminant le paramètre t, nous obtenons une famille de courbes dans le plan de phase

$$yx^2 = y_0 x_0^2.$$

Le point singulier $O(0, 0)$ est une *selle* (fig. 284).

IV. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes avec une partie réelle négative: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha < 0)$.

La solution du système (4) est

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{\alpha t}[C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t], \\ y &= \frac{1}{g} e^{\alpha t}[(\alpha C_1 + \beta C_2 - cC_1) \cos \beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1 - cC_2) \sin \beta t]. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Posons

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \delta = \frac{C_1}{C}, \quad \cos \delta = \frac{C_2}{C}.$$

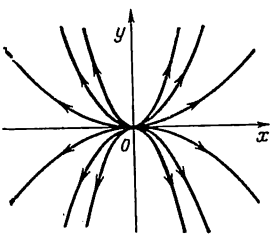


Fig. 283

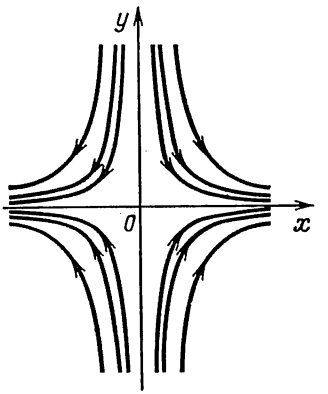


Fig. 284

L'équation (15) peut alors s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\alpha t} \sin (\beta t + \delta), \\ y &= \frac{Ce^{\alpha t}}{g}[(\alpha - c) \sin (\beta t + \delta) + \beta \cos (\beta t + \delta)], \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires susceptibles d'être tirées des conditions initiales: $x = x_0$, $y = y_0$ en faisant $t = 0$. De plus,

$$x_0 = C \sin \delta, \quad y_0 = \frac{C}{g}[(\alpha - c) \sin \delta + \beta \cos \delta],$$

d'où

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{gy_0 - x_0(\alpha - c)}{\beta}. \quad (17)$$

Rappelons que si $g = 0$, la solution se présentera sous un autre aspect, mais le caractère de l'analyse restera le même.

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits on aura

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

La solution est *stable*. Dans ce cas quand $t \to +\infty$

$$x(t) \to 0 \quad \text{et} \quad y(t) \to 0$$

en changeant de signe un nombre indéfini de fois. Sur le plan de phase le point singulier de cette nature porte le nom de *foyer stable*.

Exemple 4. Etudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = -x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1i, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

Déterminons C_1 et C_2 d'après les formules (17) : $C_1 = x_0$, $C_2 = y_0$. En les substituant dans (15) nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t), \\ y &= e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t). \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Il est évident que pour des valeurs de t quelconques

$$|x| \leqslant |x_0| + |y_0|, \quad |y| \leqslant |x_0| + |y_0|.$$

Lorsque $t \to +\infty$, $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$. La solution est stable.

Voyons maintenant comment dans ce cas sont disposées les courbes dans le plan de phase. Transformons l'expression (A). Soient

$$x_0 = M \cos \delta, \quad y_0 = M \sin \delta,$$

$$M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{y_0}{x_0}$$

Les égalités (A) prennent alors la forme :

$$\left.\begin{aligned} x &= Me^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ y &= Me^{-t} \sin(\beta t - \delta). \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Passons aux coordonnées polaires ρ et θ et exprimons ρ en fonction de θ. Les équations (B) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos \theta &= Me^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ \rho \sin \theta &= Me^{-t} \sin(\beta t - \delta). \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

En élevant les premiers et les deuxièmes membres au carré et en additionnant, nous obtenons

$$\rho^2 = M^2 e^{-2t}$$

ou encore

$$\rho = Me^{-t}. \tag{D}$$

Exprimons à présent t en fonction de θ. En divisant membre à membre les équations du système (C), nous obtenons

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta t - \delta),$$

d'où il vient

$$t=\frac{\theta+\delta}{\beta}.$$

Substituons dans (D) :

$$\rho=Me^{-\frac{\theta+\delta}{\beta}}$$

ou

$$\rho=Me^{-\frac{\delta}{\beta}-\frac{\theta}{\beta}}.$$

En désignant $Me^{-\frac{\delta}{\beta}}$ par M_1 nous obtenons en définitive

$$\rho=M_1e^{-\frac{\theta}{\beta}}. \qquad \text{(E)}$$

C'est une famille de spirales logarithmiques. Dans ce cas lorsque $t\to+\infty$ un point se déplaçant sur la trajectoire tend vers l'origine des coordonnées. Le point singulier O (0, 0) est un *foyer stable*.

V. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes avec une partie réelle positive : $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ $(\alpha>0)$.

Dans ce cas la solution s'exprimera également au moyen des formules (15), où $\alpha>0$. Lorsque $t\to+\infty$, $|x(t)|$ et $|y(t)|$ peuvent prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut quelles que soient les conditions initiales x_0 et y_0 $(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\neq 0)$. La solution est *instable*. Sur le plan de phase un point singulier de cette nature porte le nom de *foyer instable*. Un point se déplaçant sur la trajectoire s'éloigne indéfiniment de l'origine des coordonnées.

Exemple 5. Etudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt}=x+y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-x+y.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2-2\lambda+2=0,$$

$$\lambda_1=1+i, \quad \lambda_2=1-i.$$

La solution (15), compte tenue de (17), est dans ce cas

$$x=e^t(x_0\cos t+y_0\sin t),$$

$$y=e^t(y_0\cos t-x_0\sin t).$$

Dans le plan de phase nous obtenons une courbe en coordonnées polaires

$$\rho=\overline{M}_1e^{\theta/\beta}.$$

Le point singulier est un *foyer instable* (fig. 285).

VI. Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres imaginaires purs: $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$. Dans ce cas la solution (15) prend la forme:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \\ y &= \frac{1}{g}\left[(\beta C_2 - cC_1)\cos \beta t + (-\beta C_1 - cC_2)\sin \beta t\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées d'après la formule (17):

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{gy_0 + cx_0}{g}. \tag{19}$$

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits, $|x(t)| < \varepsilon$ et $|y(t)| < \varepsilon$ quel que soit t. La solution est donc *stable*. x et y sont des fonctions périodiques de t.

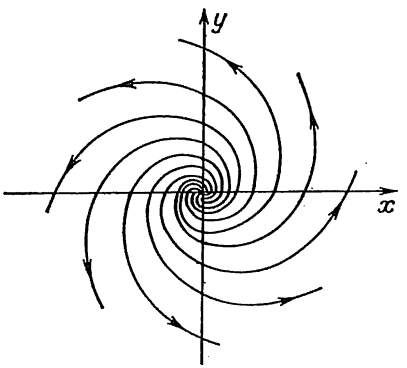


Fig. 285

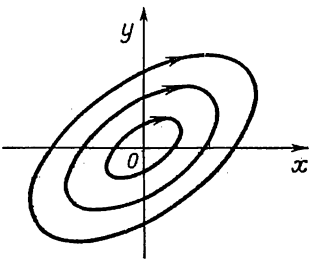


Fig. 286

Pour analyser les courbes intégrales dans le plan de phase, il est plus commode d'écrire la première des solutions (18) sous la forme suivante (cf. (16)):

$$\left.\begin{aligned} x &= C \sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{C\beta}{g}\cos(\beta t + \delta) - \frac{Cc}{g}\sin(\beta t + \delta), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

où C et δ sont des constantes arbitraires. Nous constatons immédiatement d'après (20) que x et y sont des fonctions périodiques de t. Eliminons le paramètre t des équations (20)

$$y = \frac{C\beta}{g}\sqrt{1 - \frac{x^2}{C^2}} - \frac{c}{g}x.$$

En faisant disparaître le radical, nous obtenons:

$$\left(y - \frac{c}{g}x\right)^2 = \left(\frac{C\beta}{g}\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right). \tag{21}$$

C'est une famille de courbes du second degré (courbes réelles) dépendant de la constante arbitraire C. Aucune d'elles ne possède de point indéfiniment éloigné. Par conséquent, c'est une famille d'ellipses entourant l'origine des coordonnées (lorsque $c = 0$ les axes des ellipses sont parallèles aux axes des coordonnées). Le point singulier de cette nature est appelé *centre* (fig. 286).

Exemple 6. Etudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-4x.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2+4=0, \quad \lambda=\pm 2i.$$

Les solutions (20) seront

$$x = C \sin (2t + \delta),$$
$$y = 2C \cos (2t + \delta).$$

L'équation (21) prend la forme

$$y^2=4C^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right), \quad \frac{y^2}{4C^2}+\frac{x^2}{C^2}=1.$$

Nous obtenons ainsi une famille d'ellipses dans le plan de phase. Le point singulier est un *centre*.

VII. Soient $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$.
La solution (8) dans ce cas prend la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\left[-C_1 c + C_2 (\lambda_2 - c)\, e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits, $|x(t)| < \varepsilon$ et $|y(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t > 0$. La solution est donc *stable*.

Exemple 7. Etudier la stabilité de la solution du système

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=-y. \tag{α}$$

Solution. Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2+\lambda=0, \quad \lambda_1=0, \quad \lambda_2=-1.$$

Dans ce cas $g = 0$. Résolvons directement le système sans recourir aux formules (22)

$$x = C_1, \quad y = C_2 e^{-t}. \tag{β}$$

La solution satisfaisant aux conditions initiales $x = x_0$ et $y = y_0$ lorsque $t = 0$ est

$$x = x_0, \quad y = y_0 e^{-t}. \tag{γ}$$

Il est évident que la solution est *stable*. Dans le plan de phase l'équation différentielle est $\frac{dx}{dy} = 0$. L'intégrale générale est $x = C$. Les trajectoires sont donc des droites parallèles à l'axe Oy. De l'équation (γ) il vient que les points sur les trajectoires s'approchent de la droite $y = 0$ (fig. 287).

VIII. Soient $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Des formules (22) ou (8′) il résulte que la solution n'est pas stable, étant donné que $|x(t)| + |y(t)| \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$.

IX. Soit $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

La solution est

$$\left.\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda_1 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\, e^{\lambda_1 t}\,[C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct)]. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Etant donné que $e^{\lambda_1 t} \to 0$ et $te^{\lambda_1 t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir C_1 et C_2 (par le choix de x_0 et y_0) tels que

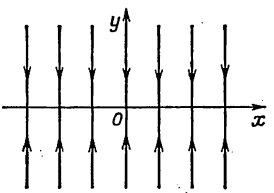


Fig. 287

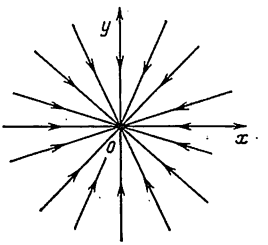


Fig. 288

$|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t > 0$. La solution est donc *stable*. De plus, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

Exemple 8. Etudier la stabilité de la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y.$$

Solution. Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (\lambda+1)^2 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Dans ce cas $g = 0$. La solution du système aura la forme (8′):

$$x = C_1 e^{-t}, \qquad y = C_2 e^{-t},$$

en outre $x \to 0$, $y \to 0$ quand $t \to +\infty$. La solution est stable. La famille de courbes représentées sur le plan de phase aura pour équation

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} = k \quad \text{ou} \quad y = kx.$$

C'est un faisceau de droites passant par l'origine des coordonnées. Les points se déplaçant sur la trajectoire tendent vers l'origine des coordonnées. Le point singulier O (0, 0) est un *nœud* (fig. 288).

Notons qu'au cas où $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ l'allure de la solution (22) ne change pas, mais quand $t \to +\infty$, $|x(t)| \to \infty$ et $|y(t)| \to \infty$. La solution est donc *instable*.

X. Soit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Alors

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 t, \\ y &= \frac{1}{g}[-cC_1 + C_2 - cC_2 t]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

On voit que $x \to \infty$ et $y \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$. La solution est donc *instable*.

Exemple 9. Etudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

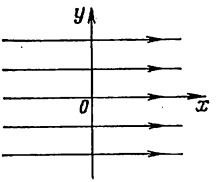


Fig. 289

Solution. Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La solution est donc

$$y = C_2, \quad x = C_2 t + C_1.$$

Il est évident que $x \to \infty$ quand $t \to +\infty$. La solution est donc *instable*. Dans le plan de phase l'équation sera $\frac{dy}{dx} = 0$. Les trajectoires $y = C$ sont des droites parallèles à l'axe Ox (fig. 289). Le point singulier de cette nature s'appelle *selle dégénérée*.

Pour donner un critère général de stabilité de la solution du système (4) procédons de la façon suivante.

Ecrivons les racines de l'équation caractéristique sous la forme de nombres complexes:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(si les racines sont réelles, $\lambda_1^{**} = 0$ et $\lambda_2^{**} = 0$).

Introduisons le plan de la variable complexe $\lambda^*\lambda^{**}$ et représentons les racines de l'équation caractéristique par des points sur ce plan. Ainsi d'après les cas que nous venons d'examiner le critère de stabilité de la solution du système (4) peut s'énoncer de la manière suivante.

Si aucune des racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique (6) *n'est située à droite de l'axe imaginaire et si l'une d'elles au moins est non nulle, la solution est stable; si l'une des racines au moins est située à droite de l'axe imaginaire ou si elles sont toutes deux nulles, la solution est instable* (fig. 290).

Considérons maintenant un système d'équations plus général :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

La solution de ce système ne s'exprime pas, sauf pour des cas exceptionnels, au moyen de fonctions élémentaires et de quadratures.

Pour s'assurer si les solutions de ce système sont stables ou non on les compare à celles d'un système linéaire. Supposons que lorsque $x \to 0$ et $y \to 0$ les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ tendent également vers zéro, mais plus rapidement que ρ où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; en d'autres termes

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0, \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

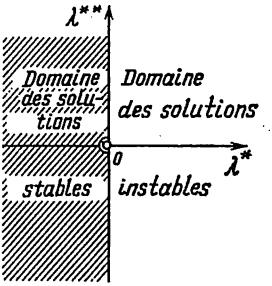


Fig. 290

On démontre alors que, sauf exception, la solution du système (25) sera de la même nature quant à sa stabilité que la solution du système

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Cette exception est précisément le cas où les deux racines de l'équation caractéristique sont situées sur l'axe imaginaire; le problème de la stabilité de la solution du système (25) se complique alors considérablement.

A. Liapounov a étudié le problème de la stabilité des solutions de systèmes d'équations sous des hypothèses assez générales.

Dans la théorie des oscillations on est souvent amené à résoudre l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{26}$$

Posons

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{27}$$

Nous obtenons alors le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= f(x, v). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Pour ce système le plan de phase sera le plan (x, v). Les trajectoires illustrent géométriquement la dépendance de la vitesse v par rapport à x et donnent une image concrète des variations de x et v. Si le point $x = 0$, $v = 0$ est un point singulier, il définit la position d'équilibre.

Si, par exemple, le point singulier du système d'équations est un centre, c'est-à-dire que, dans le plan de phase, les trajectoires sont des courbes fermées autour de l'origine des coordonnées, les mouvements représentés par l'équation (26) ne sont pas des oscillations amorties. Si, par contre, le point singulier du plan de phase est un foyer (et qu'en outre $|x| \to 0$, $|v| \to 0$ lorsque $t \to \infty$), les mouvements représentés par l'équation (26) sont des oscillations amorties. Si le point singulier est un nœud ou une selle (et ce point singulier est unique), alors $x \to \pm\infty$ lorsque $t \to \infty$. Dans ce cas un point matériel se déplaçant sur la trajectoire s'éloigne à l'infini.

Si l'équation (26) est une équation linéaire de la forme $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b\frac{dx}{dt}$ le système (28) devient alors

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = ax + bv.$$

Il se ramène donc à un système de la forme (4). Le point $x = 0$, $v = 0$ est un point singulier définissant la position d'équilibre. Notons que la variable x n'est pas obligatoirement un déplacement mécanique d'un point. Elle est susceptible d'avoir un autre sens physique et représenter, par exemple, des oscillations électriques.

§ 32. Solution approchée des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler

Nous considérerons deux méthodes de résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre. Dans ce paragraphe nous aborderons *la méthode d'Euler*.

Trouvons la solution approchée de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

sur le segment $[x_0, b]$, vérifiant la condition initiale $y = y_0$ pour $x = x_0$. Découpons le segment $[x_0, b]$ à l'aide des points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ en n parties égales (ici $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Introduisons la notation $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, par conséquent,

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Soit $y = \varphi(x)$ une certaine solution approchée de l'équation (1) et

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n).$$

Introduisons les notations

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \ldots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

En chacun des points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'équation (1) remplaçons la dérivée par le rapport des différences finies:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \qquad (2)$$

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x. \qquad (2')$$

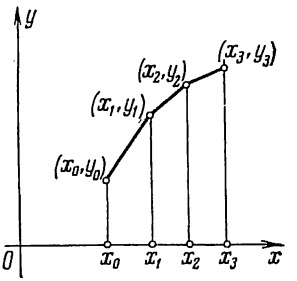


Fig. 291

Pour $x = x_0$ nous aurons

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x$$

ou

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\,h.$$

Dans cette égalité x_0, y_0, h sont connus, par conséquent nous trouvons:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,h.$$

Pour $x = x_1$ l'équation (2') sera de la forme

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h$$

ou

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h.$$

x_1, y_1, h sont ici connus, par contre on détermine y_2.

Nous trouvons de même:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

Nous avons ainsi trouvé les valeurs approchées de la solution aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Réunissant sur le plan des coordonnées les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n) par des segments de droite, nous obtenons une ligne brisée qui est la représentation approchée de la courbe intégrale (fig. 291). Cette ligne brisée est appelée *ligne brisée d'Euler*.

R e m a r q u e. Désignons par $y = \varphi_h(x)$ la solution approchée de l'équation (1) correspondant à la ligne brisée d'Euler pour $\Delta x = h$. On peut démontrer que s'il existe une solution unique $y = \varphi^*(x)$ de l'équation (1), satisfaisant aux conditions initiales et déterminée sur le segment $[x_0, b]$, alors $\lim\limits_{h \to 0} | \varphi_h(x) - \varphi^*(x) | = 0$ pour tout x de l'intervalle $[x_0, b]$.

E x e m p l e. Trouver la valeur approchée pour $x = 1$ de la solution de l'équation

$$y' = y + x$$

vérifiant la condition initiale: $y_0 = 1$ pour $x_0 = 0$.

S o l u t i o n. Divisons le segment $[0, 1]$ en 10 parties à l'aide des points $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; . . . ; 1,0. Par conséquent, $h = 0{,}1$. Nous rechercherons les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à l'aide de la formule (2')

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)\, h$$

ou

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)\, h.$$

Nous obtenons ainsi:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,$$

$$y_2 = 1{,}1 + (1{,}1 + 0{,}1) \cdot 0{,}1 = 1{,}22,$$

. . . . . .

Au cours de la résolution nous formons le tableau:

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0{,}1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0{,}2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0{,}3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0{,}4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0{,}5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0{,}6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0{,}7$	2,1918	2,8918	0,2892
$x_8 = 0{,}8$	2,4810	3,2810	0,3281
$x_9 = 0{,}9$	2,8091	3,7091	0,3709
$x_{10} = 1{,}0$	3,1800		

Nous avons trouvé la valeur approchée $y \mid_{x=1} = 3{,}1800$. La solution exacte de l'équation donnée, vérifiant les conditions initiales citées précédemment, sera

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Par conséquent,

$$y \mid_{x=1} = 2(e - 1) = 3{,}4366.$$

L'erreur absolue est égale à 0,2566, l'erreur relative à:

$$\frac{0{,}2566}{3{,}4366} = 0{,}075 \approx 8\ \%.$$

§ 33. Solution approchée des équations différentielles par la méthode des différences finies basée sur l'application de la formule de Taylor. Méthode d'Adams

Nous rechercherons de nouveau la solution de l'équation

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

sur le segment $[x_0, b]$ vérifiant la condition initiale : pour $x = x_0$, $y = y_0$. Introduisons les notations qui nous serviront par la suite. Les valeurs approchées de la solution aux points

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

seront

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Les premières différences ou les différences du premier ordre seront :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ \ldots, \ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Les deuxièmes différences ou les différences du deuxième ordre sont :

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 y_{n-2} &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}. \end{aligned}$$

Les différences des différences du deuxième ordre sont appelées différences du troisième ordre, etc. Désignons par $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ les valeurs approchées des dérivées et par $y''_0, y''_1, \ldots, y''_n$ les valeurs approchées des dérivées du deuxième ordre, etc. On détermine d'une manière analogue les premières différences des dérivées

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \ \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \ \ldots, \ \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

et les secondes différences des dérivées

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \ \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \ \ldots, \ \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2},$$

etc.

Ecrivons ensuite la formule de Taylor pour la solution de l'équation au voisinage du point $x = x_0$ (t. I, ch. IV, § 6, formule (6)) :

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m. \tag{2}$$

Dans cette formule y_0 est connu et nous trouvons les valeurs des dérivées $y'_0, y''_0, \ldots$ à partir de l'équation (1) de la manière suivante.

Portant dans le second membre de l'équation (1) les valeurs initiales x_0, y_0 nous trouvons y'_0:

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Dérivant les termes de l'équation (1) par rapport à x, nous obtenons:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{3}$$

Portant dans le second membre les valeurs x_0, y_0, y'_0, nous trouvons:

$$y''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_{x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y'_0}.$$

Dérivant encore une fois l'égalité (3) par rapport à x et portant les valeurs x_0, y_0, y'_0, y''_0 nous trouvons y'''_0. En poursuivant *) ainsi nous pouvons trouver les valeurs des dérivées de n'importe quel ordre pour $x = x_0$. Tous les termes du second membre de la formule (2), excepté le terme restant R_m, sont connus. Ainsi en négligeant le terme restant nous pouvons obtenir les valeurs approchées pour n'importe quelle valeur de x; leur degré d'exactitude dépendra de la grandeur $|x - x_0|$ et du nombre de termes dans le développement.

Dans la méthode considérée plus bas on ne détermine à l'aide de la formule (2) que certaines premières valeurs de y quand $|x - x_0|$ est petit. Nous déterminerons les valeurs y_1 et y_2 pour $x_1 = x_0 + h$ et $x_2 = x_0 + 2h$, en prenant *quatre* termes du développement (y_0 est connue des données initiales):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0, \tag{4}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0. \tag{4'}$$

Nous supposons ainsi connues trois valeurs **) de la fonction: y_0, y_1, y_2. Sur la base de ces valeurs nous déterminons en utilisant l'équation (1):

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_1, y_1), \quad y'_2 = f(x_2, y_2).$$

Connaissant y'_0, y'_1, y'_2 nous pouvons déterminer $\Delta y'_0$, $\Delta y'_1$, $\Delta^2 y'_0$, Groupons les résultats des calculs dans le tableau suivant:

---

*) Nous supposerons dans ce qui suit que la fonction $f(x, y)$ est dérivable par rapport à x et y autant de fois que l'exigent les raisonnements.

**) Pour une solution d'un degré d'exactitude plus élevé nous aurions dû calculer plus que trois premières valeurs de y.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0		
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$
			$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
...	...	...	...	...
$x_{k-2} = x_0 + (k-2)\,h$	y_{k-2}	y'_{k-2}		
			$\Delta y'_{k-2}$	
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)\,h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
			$\Delta y'_{k-1}$	
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k		

Supposons maintenant que nous connaissons les valeurs de la solution

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k.$$

Sur la base de ces valeurs nous pouvons calculer, en utilisant l'équation (1), les valeurs des dérivées

$$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots.\ y'_k,$$

et, par conséquent,

$$\Delta y'_0,\ \Delta y'_1,\ \ldots,\ \Delta y'_{k-1}$$

et

$$\Delta^2 y'_0,\ \Delta^2 y'_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Déterminons la valeur de y_{k+1} d'après la formule de Taylor en posant $a = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k + \ldots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}_k + R_m.$$

Limitons-nous dans ce cas à quatre termes dans le développement :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k. \tag{5}$$

Dans cette formule les inconnues sont y''_k et y'''_k, que nous chercherons à déterminer à l'aide des différences connues du premier et second ordre.

Exprimons tout d'abord y'_{k-1} à l'aide de la formule de Taylor, en posant $a = x_k$, $x - a = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k, \tag{6}$$

et y'_{k-2} en posant $a = x_k$, $x - a = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \tag{7}$$

Nous tirons de l'égalité (6):

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \tag{8}$$

Retranchant des termes de l'égalité (6) les termes de l'égalité (7) nous obtenons :

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \tag{9}$$

Nous tirons de (8) et (9)

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k$$

ou

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2}. \tag{10}$$

Portant la valeur de y'''_k dans l'égalité (8) nous obtenons :

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2h}. \tag{11}$$

Nous avons ainsi trouvé y''_k et y'''_k. Portant les expressions (10) et (11) dans le développement (5) nous obtenons :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2}. \tag{12}$$

C'est la *formule dite d'Adams* pour quatre termes. La formule (12) permet, connaissant y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, de déterminer y_{k+1}. Ainsi connaissant y_0, y_1 et y_2 nous pouvons trouver y_3 et par suite y_4, y_5, . . .

Remarque 1. Indiquons sans le démontrer que s'il existe une solution unique de l'équation (1) sur le segment $[x_0, b]$ vérifiant les conditions initiales, alors l'erreur des valeurs approchées déterminées par la formule (12) n'excède pas en valeur absolue Mh^4, où M est une constante ne dépendant que de la longueur de l'intervalle et de la forme de la fonction $f(x, y)$ et indépendante de la grandeur h.

Remarque 2. Si nous voulons réduire la marge d'erreur, il convient de prendre un plus grand nombre de termes dans le développement (5) et de modifier en conséquence la formule (12). Ainsi, si au lieu de la formule (5) nous prenons une formule dont le membre de droite recèle cinq termes, autrement dit si nous ajoutons un terme d'ordre h^4, nous obtiendrons d'une manière analogue au lieu de la formule (12) la formule

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3}.$$

Ici y_{k+1} est déterminé à partir des valeurs y_k, y_{k-1}, y_{k-2} et y_{k-3}. Ainsi, avant d'aborder les calculs suivant cette formule, il faut connaître les quatre premières valeurs de la solution : y_0, y_1, y_2, y_3. Lors du calcul de ces valeurs à l'aide des formules du type (4) il convient de prendre cinq termes dans le développement.

Exemple 1. Trouver les valeurs approchées de la solution de l'équation

$$y' = y + x$$

vérifiant la condition initiale

$$y_0 = 1 \text{ pour } x_0 = 0.$$

Déterminer les valeurs de la solution pour $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Solution. Trouvons d'abord y_1 et y_2 à l'aide des formules (4) et (4'). Nous obtenons de l'équation et des conditions initiales :

$$y'_0 = (y + x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

Dérivant cette équation nous obtenons :

$$y'' = y' + 1.$$

Par conséquent,

$$y''_0 = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Dérivons encore une fois

$$y''' = y''.$$

Par consequent,

$$y'''_0 = y''_0 = 2.$$

Portant dans l'égalité (4) les valeurs y_0, y'_0, y''_0 et $h = 0{,}1$ nous obtenons :

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1 + \frac{(0{,}1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0{,}1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1{,}1103.$$

D'une manière analogue nous trouverons pour $h=0,2$:

$$y_2=1+\frac{0,2}{1}\cdot 1+\frac{(0,2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{(0,2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2=1,2427.$$

Connaissant y_0, y_1, y_2 nous obtiendrons à partir de l'équation :

$$y'_0=y_0+x_0=1\ ;$$
$$y'_1=y_1+x_1=1,1103+0,1=1,2103\ ;$$
$$y'_2=y_2+x_2=1,2427+0.2=1.4427\ :$$
$$\Delta y'_0=0,2103\ ;$$
$$\Delta y'_1=0,2324\ ;$$
$$\Delta^2 y'_0=0,0221.$$

Dressons avec les valeurs obtenues le tableau suivant.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0=0$	$y_0=1,0000$	$y'_0=1$		
			$\Delta y'_0=0,2103$	
$x_1=0,1$	$y_1=1,1103$	$y'_1=1,2103$		$\Delta^2 y'_0=0,0221$
			$\Delta y'_1=0,2324$	
$x_2=0,2$	$y_2=1,2427$	$y'_2=1,4427$		$\Delta^2 y'_1=0,0244$
			$\Delta y'_2=0,2568$	
$x_3=0,3$	$y_3=1,3995$	$y'_3=1,6995$		
$x_4=0,4$	$y_4=1,5833$			

Nous tirons y_3 de la formule (12) :

$$y_3=1,2427+\frac{0,1}{1}\cdot 1,4427+\frac{0,1}{2}\cdot 0,2324+\frac{5\cdot(0,1)}{12}\cdot 0,0221=1.3995.$$

Nous trouvons ensuite les valeurs y'_3, $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$. Puis à l'aide de la même formule (12) nous trouvons y_4 :

$$y_4=1,3995+\frac{0,1}{1}\cdot 1,6995+\frac{0,1}{2}\cdot 0,2568+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0244=1,5833.$$

L'expression exacte de la solution de cette équation est :

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Par conséquent, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0,4 - 1 = 1,58364$. L'erreur absolue est : 0,0003 ; l'erreur relative : $\frac{0,0003}{1,5836} \approx 0,0002 = 0,02\ \%$. (L'erreur absolue de la valeur de y_4 calculée par la méthode d'Euler est 0,06 ; l'erreur relative : 0,038 = = 3,8 %.)

Exemple 2. Trouver les valeurs approchées de la solution de l'équation

$$y' = y^2 + x^2,$$

vérifiant la condition initiale : $y_0 = 0$ pour $x_0 = 0$. Déterminer les valeurs de la solution pour $x = 0,1$; 0,2 ; 0,3 ; 0,4.

Solution. Nous trouvons :

$$y'_0 = 0^2 + 0^2 = 0,$$
$$y''_{x=0} = (2yy' + 2x)_{x=0} = 0,$$
$$y'''_{x=0} = (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2.$$

Nous obtenons des formules (4) et (4') :

$$y_1 = \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0003, \quad y_2 = \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0027.$$

Nous tirons de l'équation :

$$y'_0 = 0, \quad y'_1 = 0,0100, \quad y'_2 = 0,0400.$$

A l'aide de ces valeurs nous composons les premières lignes du tableau, puis nous déterminons les valeurs de y_3 et y_4 d'après la formule (12).

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 0$		
			$\Delta y'_0 = 0,0100$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,0003$	$y'_1 = 0,0100$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0200$
			$\Delta y'_1 = 0,0300$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,0027$	$y'_2 = 0,0400$		$\Delta_2 y'_1 = 0,0201$
			$\Delta y' = 0,0501$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,0090$	$y'_3 = 0,0901$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,0204$			

Ainsi

$$y_3 = 0{,}0027 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 0{,}0400 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}0300 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0200 = 0{,}0090,$$

$$y_4 = 0{,}0090 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 0{,}0901 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}0501 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0201 = 0{,}0214.$$

Notons que pour y_4 les quatre premiers chiffres exactes après la virgule sont: $y_4 = 0{,}0213$. (On peut les obtenir par d'autres méthodes plus précises permettant d'évaluer l'erreur.)

§ 34. Méthode de Runge-Kutta

Soit donnée l'équation différentielle

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

On demande de trouver la solution de cette équation satisfaisant aux conditions initiales:

$$y = y_0 \text{ pour } x = x_0. \tag{2}$$

Considérons le domaine D du plan xOy (fig. 291a)

$$-A \leqslant x - x_0 < A,$$

$$-B \leqslant y - y_0 < B,$$

où A et B sont des nombres positifs donnés.

Supposons qu'en chaque point $M(x, y)$ du domaine D pour un h

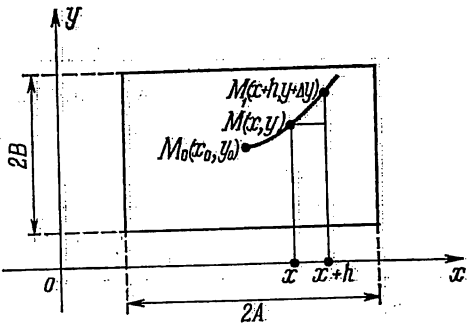


Fig. 291a

donné la solution de l'équation (1) puisse être développée d'après la formule de Taylor jusqu'aux membres d'ordre h^4 inclus.

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(\mathrm{IV})}(x) + \lambda h^5, \tag{3}$$

où λ est une quantité bornée dans le domaine D.

$|\lambda| < C$ où C ne dépend pas de x, y, h.

(Nous n'allons pas étudier les conditions auxquelles doit satisfaire $f(x, y)$ pour que ce développement soit possible).

En posant

$$\Delta y = y(x+h) - y(x), \tag{4}$$

la formule (3) s'écrit sous la forme:

$$\Delta y = \frac{h}{1} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(IV)}(x) + \lambda h^5. \tag{5}$$

Par conséquent, si on connaît la valeur $y(x)$ au point x et les dérivées jusqu'au 4-ième ordre inclus (les dérivées $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{(IV)}(x)$ peuvent être tirées de l'équation (1)), on peut déterminer Δy puis $y(x+h)$. Toutefois il est plus commode de calculer Δy par une autre méthode: la *méthode de Runge-Kutta* exposée ci-dessous.

Donnons-nous les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x+h, y+k_3). \end{aligned} \tag{6}$$

On peut alors montrer aux termes en h^4 près, que le Δy donné par la formule (4) coïncide avec le Δy donné par la formule suivante:

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{7}$$

Indiquons comment a été obtenue cette équation sans nous livrer à tous les calculs.

De l'équation (1) nous tirons:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y), \\ y''' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

De la même manière nous trouvons $y^{(IV)}$.

En substituant ces expressions dans l'égalité (5) ($\lambda^1 h^5$ est négligé), on trouve Δy exprimé en fonction de $f(x, y)$, des dérivées partielles de $f(x, y)$ jusqu'au troisième ordre inclus et des puissances en h jusqu'à h^4 inclus. Considérons à présent les expressions (6): dévelop-

pons au voisinage du point $M(x, y)$ chacune des fonctions f exprimant k_2, k_3, k_4 d'après la formule de Taylor pour deux variables (cf. t. I. chap. VIII, § 17) jusqu'aux accroissements du troisième degré des variables. Il est évident que k_1, k_2, k_3, k_4 et, par conséquent, $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ s'exprimeront en fonction de $f(x, y)$, de ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclus et des puissances en h jusqu'à h^4 inclus. En substituant les expressions ainsi obtenues dans l'équation (7) nous vérifions que nous avons bien affaire à une identité. Notons que les calculs se trouvent sensiblement simplifiés si nous introduisons l'opérateur de dérivation *)

$$Du = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) u.$$

Revenons à présent à la solution de l'équation (1) avec les conditions initiales (2).

Posons :

$$\begin{array}{lll} & y(x_0) = y_0, & \\ x_0 + h = x_1, & y(x_0 + h) = y_1, & y_1 - y_0 = \Delta y_1, \\ x_1 + h = x_2, & y(x_1 + h) = y_2, & y_2 - y_1 = \Delta y_2, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ x_{s-1} + h = x_s & y(x_{s-1} + h) = y_s & y_s - y_{s-1} = \Delta y_s. \end{array} \tag{8}$$

Commençons par chercher

$$y_1 = y(x_0 + h).$$

Pour cela il nous faut connaître

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0$$

ou bien

$$y_1 = y_0 + \Delta y.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} k_1^{(0)} &= hf(x_0, y_0), \\ k_2^{(0)} &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right), \\ k_3^{(0)} &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right), \\ k_4^{(0)} &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}). \end{aligned} \tag{9}$$

D'après la formule (7) nous pouvons écrire :

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) \tag{10}$$

*) Pour une démonstration détaillée se reporter à l'ouvrage « Méthodes d'analyse numérique » de B. Demidovitch, I. Maron, E. Chouvalova (en russe).

et

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

y_1 étant maintenant connu, cherchons y_2
Nous avons

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= hf(x_1, y_1), \\ k_2^{(1)} &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right), \\ k_3^{(1)} &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right), \\ k_4^{(1)} &= hf(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)}). \end{aligned} \tag{11}$$

D'après la formule (7) nous avons $\Delta y_2 = y_2 - y_1$. Δy_2 et y_1 étant connus, d'après (4) y_2 est par conséquent déterminé. De la même manière on trouve y_3, y_4, et ainsi de suite.

Pour trouver plus aisément les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$, les résultats des calculs sont groupés dans le tableau ci-dessous.

i	x	y	$k = hf$	Δy
0	x_0 $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$ $y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$ $y_0 + h$	$k_1^{(0)}$ $k_2^{(0)}$ $k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$	Δy_1
1	x_1 $x_1 + \frac{h}{2}$ $x_1 + \frac{h}{2}$ $x_1 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_1$ $y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$ $y_2 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$ $y_3 + k_3^{(1)}$	$k_1^{(1)}$ $k_2^{(1)}$ $k_3^{(1)}$ $k_4^{(1)}$	Δy_2
. . . . .				
m	x_m $x_m + \frac{h}{2}$ $x_m + \frac{h}{2}$ $x_m + h$	$y_m = y_{m-1} + \Delta y_m$ $y_m + \frac{k_1^{(m)}}{2}$ $y_m + \frac{k_2^{(m)}}{2}$ $y_m + k_3^{(m)}$	$k_1^{(m)}$ $k_2^{(m)}$ $k_3^{(m)}$ $k_4^{(m)}$	Δy_{m+1}

La méthode de Runge-Kutta se prête facilement à la programmation.

Ajoutons que cette méthode est d'autant plus commode qu'on peut à chaque étape choisir le pas approprié du calcul h.

Il est relativement difficile d'évaluer l'erreur de la solution $y(x)$ pour une valeur donnée de x. On recommande néanmoins de recourir au procédé suivant (qui est donné sans démonstration) pour obtenir par un choix judicieux de h, le degré de précision voulue.

On cherche la solution $y_h(x)$ avec le pas $h=\frac{x-x_0}{n}$ et la solution $y_{\frac{h}{2}}(x)$ avec le pas $h_1=\frac{h}{2}$.

On fait ensuite le module de la différence $|y_h(x)-y_{\frac{h}{2}}(x)|$.

Si cette différence n'excède pas l'erreur autorisée, la solution $y_{\frac{h}{2}}(x)$ est aceptable. Si au contraire cette différence excède l'erreur autorisée, il faut alors se donner d'autres h^* et $h_1^*=\frac{h^*}{2}$ et reprendre les calculs. Cette remarque s'applique également à la méthode d'Adams.

Illustrons la méthode de Runge-Kutta par la résolution d'un exemple simple où les calculs peuvent être faits à la main.

Exemple. Trouver la solution de l'équation

$$y' = x + y$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y_0 = 1 \text{ pour } x = 0$$

sur le segment

$$[0;\ 0{,}4].$$

Solution: Prenons $h = 0{,}1$. Il nous faut, par conséquent, chercher les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4. En ce qui nous concerne

$$f(x,\ y) = x + y.$$

Nous avons:

$$k_1^{(0)}=hf(x,\ y)=0{,}1\,(0+1)=0{,}1,$$

$$k_2^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}\right)=0{,}1\left[\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)+\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)\right]=0{,}11,$$

$$k_3^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}\right)=0{,}1\left[\left(0+\frac{0{,}1}{2}\right)+\left(1+\frac{0{,}11}{2}\right)\right]=0{,}1105,$$

$$k_4^{(0)}=hf(x_0+h,\ y_0+k_3^{(0)})=0{,}1\,[(0+0{,}1)+(1+0{,}1105)]=0{,}12105.$$

D'après la formule (10) il vient:

$$\Delta y_1=\frac{1}{6}\,[0{,}1+2\cdot 0{,}11+2\cdot 0{,}1105+0{,}1210]=0{,}1103.$$

D'après la formule (4) nous obtenons

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103.$$

Portons les résultats des calculs de y_2, y_3, y_4 dans le tableau suivant.

i	x	y	$h=0{,}1\,(x+y)$	Δy
0	0 0,05 0,05 0,1	1 1,05 1,055 1,1105	0,1 0,11 0,1105 0,1210	$\Delta y_1 = 0{,}1103$
1	0,1 0,15 0,15 0,2	1,1103 1,1708 1,1763 1,2429	0,1210 0,1321 0,1326 0,1443	$\Delta y_2 = 0{,}1324$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 1,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	$\Delta y_3 = 0{,}1569$
3	0,3 0,35 0,35 0,4	1,3996 1,4846 1,4904 1,5836	0,1700 0,1835 0,1840 0,1984	$\Delta y_4 = 0{,}1840$
4	0,4	1,5836		

Nous obtenons de la sorte les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4.

Au paragraphe précédent nous avons vu que la solution exacte de cette équation était:

$$y = 2e^x - x - 1,$$

$$y_4 = y_{x=0,4} = 1{,}58364.$$

§ 35. Méthode approchée d'intégration des systèmes d'équations différentielles du premier ordre

Les méthodes d'intégration approchées des équations différentielles considérées aux §§ 32 et 33 peuvent être appliquées également pour la solution des systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Considérons maintenant la méthode des différences pour la solution des systèmes d'équations. Nous conduirons les raisonnements pour un système de deux équations comportant deux fonctions

inconnues. On demande de chercher les solutions du système d'équations

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \tag{2}$$

vérifiant les conditions initiales: $y = y_0$, $z = z_0$, pour $x = x_0$.

Nous déterminerons les valeurs des fonctions y et z pour les valeurs de la variable indépendante $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$. Soit de nouveau

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Les valeurs approchées de la fonction seront notées

$$y_0, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$$

et respectivement

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n.$$

Ecrivons les formules de récurrence du type (12) du § 33:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h\Delta^2 y'_{k-2}, \tag{4}$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h\Delta^2 z'_{k-2}. \tag{5}$$

Pour aborder les calculs suivant ces formules il faut connaître outre les y_0 et z_0 donnés y_1, y_2; z_1, z_2; nous trouverons ces valeurs par les formules du type (4) et (4') du § 32:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0.$$

Pour appliquer ces formules il faut connaître y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0 que nous allons maintenant déterminer. Nous tirons maintenant des équations (1) et (2):

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0),$$

$$z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0).$$

Dérivant les équations (1) et (2) et portant les valeurs x_0, y_0, z_0, y_0' et z_0' nous trouvons:

$$y_0'' = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\, y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}\, z'\right)_{x=x_0},$$

$$z_0'' = (z'')_{x_0=x} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\, y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}\, z'\right)_{x=x_0}.$$

Dérivant encore une fois nous obtenons y_0''' et z_0'''. Connaissant y_1, y_2, z_1, z_2 nous tirons des équations (1) et (2):

$$y_1',\ y_2',\ z_1',\ z_2',\ \Delta y_0',\ \Delta y_1',\ \Delta^2 y_0',\ \Delta z_0',\ \Delta z_1',\ \Delta^2 z_0',$$

ce qui nous permet de composer les cinq premières lignes du tableau:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y_0'			z_0	z_0'		
			$\Delta y_0'$				$\Delta z_0'$	
x_1	y_1	y_1'		$\Delta^2 y_0'$	z_1	z_1'		$\Delta^2 z_0'$
			$\Delta y_1'$				$\Delta z_1'$	
x_2	y_2	y_2'		$\Delta^2 y_2'$	z_2	z_2'		$\Delta^2 z_2'$
			$\Delta y_2'$				$\Delta z_2'$	
x_3	y_3	y_3'			z_3	z_3'		

De formules (4) et (5) nous obtenons y_3 et z_3 et des équations (1) et (2) y_3' et z_3'. Calculant $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$, $\Delta z_2'$, $\Delta^2 z_1'$ nous trouvons en utilisant de nouveau les formules (4) et (5) y_4 et z_4 et ainsi de suite.

Exemple 1. Trouver les valeurs approchées des solutions du système

$$y' = z, \quad z' = y$$

pour les conditions initiales: $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ pour $x = 0$. Calculer les valeurs des solutions pour $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Solution. Nour tirons de ces équations:

$$y_0' = z_{x=0} = 1,$$
$$z_0' = y_{x=0} = 0.$$

Dérivant ces équations nous aurons :

$$y_0'' = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$
$$z_0'' = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$
$$y_0''' = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$
$$z_0''' = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

Appliquant les formules du type (4) et (5) nous obtenons :

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{1}\cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 0 + \frac{(0,1)^3}{3\,!}\cdot 1 = 0,1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1}\cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1\cdot 2}\cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3\,!}\cdot 1 = 0,2013,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1}\cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3\,!}\cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1}\cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{2\,!}\cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3\,!}\cdot 0 = 1,0200.$$

Des données obtenues nous tirons :

$$y_1' = 1,0050, \qquad z_1' = 0,1002,$$
$$y_2' = 1,0200, \qquad z_2' = 0,2013,$$
$$\Delta y_0' = 0,0050, \qquad \Delta z_0' = 0,1002,$$
$$\Delta y_1' = 0,0150, \qquad \Delta z_1' = 0,1011,$$
$$\Delta^2 y_0' = 0,0100, \qquad \Delta^2 z_0' = 0,0009,$$

et nous composons les cinq premières lignes du tableau.

Nous trouvons à l'aide des formules (4) et (5) :

$$y_3 = 0,2013 + \frac{0,1}{1}\cdot 1,0200 + \frac{0,1}{2}\cdot 0,0150 + \frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0100 = 0,3045.$$

$$z_3 = 1,0200 + \frac{0,1}{1}\cdot 0,2013 + \frac{0,1}{2}\cdot 0,1011 + \frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0009 = 1,0452$$

et d'une manière analogue

$$y_4 = 0,3045 + \frac{0,1}{1}\cdot 1,0452 + \frac{0,1}{2}\cdot 0,0252 + \frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0102 = 0,4107,$$

$$z_4 = 1,0452 + \frac{0,1}{1}\cdot 0,3045 + \frac{0,1}{2}\cdot 0,1032 + \frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0021 = 1,0809.$$

Il est évident que les solutions exactes du système donné d'équations vérifiant les conditions initiales seront

$$y = \operatorname{sh} x, \quad z = \operatorname{ch} x.$$

C'est pourquoi les quatre premiers chiffres exacts après la virgule seront

$$y_4 = \operatorname{sh} 0,4 = 0,41075, \quad z_4 = \operatorname{ch} 0,4 = 1,08107.$$

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0=0$	$y_0=0$	$y'_0=1$		
			$\Delta y'_0=0,0050$	
$x_1=0,1$	$y_1=0,1002$	$y'_1=1,0050$		$\Delta^2 y'_0=0,0100$
			$\Delta y'_1=0,0150$	
$x_2=0,2$	$y_2=0,2013$	$y'_2=1,0200$		$\Delta^2 y'_1=0,0102$
			$\Delta y'_2=0,0252$	
$x_3=0,3$	$y_3=0,3045$	$y'_3=1,0452$		
$x_4=0,4$	$y_4=0,4107$			

x	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
$x_0=0$	$z_0=1$	$z'_0=0$		
			$\Delta z'_0=0,1002$	
$x_1=0,1$	$z_1=1,0050$	$z'_1=0,1002$		$\Delta^2 z'_0=0,0009$
			$\Delta z'_1=0,1014$	
$x_2=0,2$	$z_2=1,0200$	$z'_2=0,2013$		$\Delta^2 z'_2=0,0021$
			$\Delta z'_2=0,1032$	
$x_3=0,3$	$z_3=1,0452$	$z'_3=0,3045$		
$x_4=0,4$	$z_4=1,0809$			

R e m a r q u e. Comme les équations d'ordre supérieur et les systèmes d'équations des ordres supérieurs se ramènent dans de nombreux cas à un système d'équations du premier ordre, la méthode exposée est également applicable à la résolution de ces problèmes.

Exercices

Montrer que les fonctions ci-dessous dépendant de constantes arbitraires satisfont aux équations différentielles en regard.

Fonctions	Equations différentielles
1. $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$.	$\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.
2. $y=Cx+C-C^2$.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}+y=0$.
3. $y^2=2Cx+C^2$.	$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$.
4. $y^2=Cx^2-\frac{a^2C}{1+C}$.	$xy\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}$.
5. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3$.	$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2}=0$.
6. $y=(C_1+C_2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$.	$\frac{d^2y}{d^2x}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=e^x$.
7. $y=C_1e^{a\arcsin x}+$ $+C_2e^{-a\arcsin x}$.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$.
8. $y=\frac{C_1}{x}+C_2$.	$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=0$.

Intégrer les équations à variables séparables :

9. $y\,dx-x\,dy=0$. Rép. $y=Cx$.
10. $(1+u)\,v\,du+(1-v)\,u\,dv=0$. Rép. $\operatorname{Log} uv+u-v=C$.
11. $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$. Rép. $(1+y)(1-x)=C$.
12. $(t^2-xt^2)\frac{dx}{dt}+x^2+tx^2=0$. Rép. $\frac{t+x}{tx}+\operatorname{Log}\frac{x}{t}=C$.
13. $(y-a)\,dx+x^2\,dy=0$. Rép. $(y-a)=Ce^{\frac{1}{x}}$.
14. $z\,dt-(t^2-a^2)\,dz=0$. Rép. $z^{2a}=C\frac{t-a}{t+a}$.
15. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$. Rép. $x=\frac{y+C}{1-Cy}$.
16. $(1+s^2)\,dt-\sqrt{t}\,ds=0$. Rép. $2\sqrt{t}-\operatorname{arc\,tg} s=C$.
17. $d\rho+\rho\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. Rép. $\rho=C\cos\theta$.

18. $\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi=0$. Rép. $\cos\varphi=C\cos\theta$.

19. $\sec^2\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\theta+\sec^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\varphi=0$. Rép. $\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi=C$.

20. $\sec^2\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi+\sec^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta=0$. Rép. $\sin^2\theta+\sin^2\varphi=C$.

21. $(1+x^2)\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. Rép. $\arcsin y-\mathrm{arc\,tg}\,x=C$.

22. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. Rép. $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$.

23. $3e^x\,\mathrm{tg}\,y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$. Rép. $\mathrm{tg}\,y=C(1-e^x)^3$.

24. $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$. Rép. $x^2+y^2=x^2y^2+C$.

Etablissement d'équations différentielles

25. Montrer que la courbe dont la pente de la tangente en chaque point est proportionnelle à l'abscisse du point de contact est une parabole. Rép. $y=ax^2+C$.
26. Trouver une courbe passant par le point (0, —2) telle que la pente de la tangente en chaque point soit égale à l'ordonnée correspondante augmentée de trois unités. Rép. $y=e^x-3$.
27. Trouver une courbe passant par le point (1, 1) telle que la pente de la tangente en chaque point soit proportionnelle au carré de l'ordonnée de ce point. Rép. $k(x-1)\,y-y+1=0$.
28. Trouver une courbe dont la pente de la tangente en chaque point soit n fois plus grande que celle de la droite réunissant ce point à l'origine des coordonnées. Rép. $y=Cx^n$.
29. Faire passer par le point (2, 1) une courbe dont la tangente en chaque point coïncide avec le rayon vecteur mené de l'origine à ce point. Rép. $y=\frac{1}{2}x$.
30. Trouver en coordonnées polaires l'équation d'une courbe telle qu'en chaque point la tangente de l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente à la courbe soit égale à l'inverse changé de signe du rayon vecteur. Rép. $r(\theta+C)=1$.
31. Trouver en coordonnées polaires l'équation d'une courbe telle qu'en chaque point la tangente de l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente à la courbe soit égale au carré du rayon vecteur. Rép. $r^2=2(\theta+C)$.
32. Montrer que la courbe douée de cette propriété que toutes ses normales passent par un point fixe est un cercle.
33. Trouver une courbe telle qu'en chaque point la sous-tangente soit égale au double de l'abscisse. Rép. $y=C\sqrt{x}$.
34. Trouver une courbe dont le rayon vecteur soit égal à la portion de tangente comprise entre le point de tangence et son intersection avec l'axe Ox.

    Solution. D'après les conditions du problème $\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$, d'où $\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}$. On obtient en intégrant deux familles de courbes: $y=Cx$ et $y=\frac{C}{x}$.
35. D'après la loi de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence des températures du corps et du milieu. La température de l'air étant de 20 °C, le corps se refroidit de 100° à 60 °C en l'espace de 20 minutes. On demande en combien de temps sa température tombera à 30 °C.

S o l u t i o n. L'équation différentielle du problème est $\frac{dT}{dt} = k\ (T-20)$. On trouve en intégrant $T - 20 = Ce^{kt}$; $T = 100$ lorsque $t = 0$; $T = 60$ lorsque $t = 20$; donc $C = 80$; on a $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$, par conséquent, $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Posant $T = 30$, on trouve $t = 60$ minutes.

36. On considère un entonnoir conique d'angle au sommet $d = 60°$ et de hauteur 10 cm. Au bout de quel temps T l'entonnoir sera-t-il vide, sachant que l'eau fuit par une ouverture de 0,5 cm² dans le fond?

S o l u t i o n. Calculons de deux manières différentes le volume de l'eau qui a coulé entre les instants t et $t+\Delta t$. A vitesse constante v, il s'échappe en une seconde une colonne d'eau de section 0,5 cm² et de hauteur v. Il s'échappe donc dans le temps Δt une quantité d'eau dv

$$-dv = -0{,}5\ v\ dt = -\ 0{,}3\ \sqrt{2\ gh}\ dt\ ^{*)}.$$

Par ailleurs, la hauteur diminuant avec l'écoulement, son accroissement dh est négatif et l'on a

$$-dv = \pi r^2\ dh = \frac{\pi}{3}\ (h+0{,}7)^2\ dh.$$

De sorte que

$$\frac{\pi}{3}\ (h+0{,}7)^2\ dh = -0{,}3\sqrt{2\ gh}\ dt,$$

d'où

$$t = 0{,}0315\ (10^{5/2} - h^{5/2}) + 0{,}0732\ (10^{3/2} - h^{3/2}) + 0{,}078\ (\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Posant $h = 0$, on obtient le temps d'écoulement $T = 12{,}5$ s.

37. Le freinage d'un disque tournant dans un liquide est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω. Trouver la dépendance entre la vitesse angulaire et le temps si l'on sait que la vitesse angulaire du disque est tombée de 100 tr/mn à 60 tr/mn en l'espace d'une minute. Rép. $\omega = 100\ (^3/_5)^t$ tr/mn.

38. On suppose que la pression d'une colonne d'air verticale en une section donnée dépend de la pression des couches d'air supérieures. Trouver la dépendance entre la pression et l'altitude sachant que la pression est de 1 kg/cm² au niveau de la mer et de 0,92 kg/cm² à 500 mètres d'altitude.

I n d i c a t i o n. Se servir de la loi de Mariotte en vertu de laquelle la densité d'un gaz est proportionnelle à sa pression. L'équation différentielle du problème est $dp = -kp\ dh$, d'où $p = e^{-0{,}00017h}$. Rép. $p = e^{-0{,}00017h}$.

Intégrer les équations différentielles homogènes suivantes:

39. $(y - x)\ dx + (y + x)\ dy = 0$. Rép. $y^2 + 2xy - x^2 = C$.

40. $(x + y)\ dx + x\ dy = 0$. Rép. $x^2 + 2xy = C$.

41. $(x + y)\ dx + (y - x)\ dy = 0$. Rép. $\operatorname{Log}\ (x^2 + y^2)^{1/2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C$.

42. $x\ dy - y\ dx = \sqrt{x^2 + y^2}\ dx$. Rép. $1 + 2\ Cy - C^2x^2 = 0$.

---

*) La vitesse d'écoulement v de l'eau par une ouverture se trouvant à la distance h de la surface libre est donnée par la formule $v = 0{,}6\ \sqrt{2gh}$, où g est l'accélération dans le champ de la pesanteur.

43. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$. Rép. $(x + y)^2 (2x + y)^3 = C$.

44. $(2\sqrt{st} - s)\,dt + t\,ds = 0$. Rép. $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}} = C$ ou $s = t \operatorname{Log}^2 \frac{C}{t}$.

45. $(t - s)\,dt + t\,ds = 0$. Rép. $te^{\frac{s}{t}} = C$ ou $s = t \operatorname{Log} \frac{C}{t}$.

46. $xy^2\,dy = (x^3 + y^3)\,dx$. Rép. $y = x\sqrt[3]{3 \operatorname{Log} Cx}$.

47. $x \cos \frac{y}{x} (y\,dx + x\,dy) = y \sin \frac{y}{x} (x\,dy - y\,dx)$. Rép. $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

Intégrer les équations différentielles suivantes se ramenant à des équations homogènes:

48. $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$. Rép. $(x + y - 1)^5 (x - y - 1)^2 = C$.

49. $(x + 2y + 1)\,dx - (2x + 4y + 3)\,dy = 0$. Rép. $\operatorname{Log}(4x + 8y + 5) + 8y - 4x = C$.

50. $(x + 2y + 1)\,dx - (2x - 3)\,dy = 0$. Rép. $\operatorname{Log}(2x - 3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$.

51. Déterminer la courbe dont la sous-normale est la moyenne arithmétique entre l'abscisse et l'ordonnée du point de la courbe considérée. Rép. $(x - y)^2 (x + 2y) = C$.

52. Déterminer la courbe dont le rapport du segment découpé par la tangente sur l'axe Oy au rayon vecteur est une constante.

Solution. On a par hypothèse $\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} = m$, d'où $\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{C}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}$.

53. Déterminer la courbe dont le rapport du segment découpé par la normale sur l'axe Ox au rayon vecteur est une constante.

Solution. On a par hypothèse $\frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} = m$, d'où $x^2 + y^2 = m^2 (x - C)^2$.

54. Déterminer la courbe dont le segment découpé par la tangente sur l'axe Oy est égal à $a \sec \theta$, où θ est l'angle entre le rayon vecteur et l'axe Ox.

Solution. Comme on a $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ et par hypothèse

$$y - x\frac{dy}{dx} = a \sec \theta,$$

on obtient

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},$$

d'où

$$y = \frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b} - e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right].$$

55. Déterminer la courbe dont le segment découpé par la normale sur l'axe Oy est égal à la distance du point considéré à l'origine des coordonnées.

S o l u t i o n. Le segment découpé par la normale sur l'axe Oy est égal à $y + \frac{x}{y'}$; on a donc par hypothèse

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

d'où

$$x^2 = C(2y + C).$$

56. Trouver la forme d'un miroir tel que les rayons issus d'un point O soient réfléchis parallèlement à une direction donnée.
S o l u t i o n. Confondons cette direction avec l'axe Ox et soit O l'origine. Soient OM le rayon incident, MP le rayon réfléchi, MQ la normale à la courbe cherchée:

$$\alpha = \beta;\ OM = OQ,\ NM = y,$$

$$NQ = NO + OQ = -x + \sqrt{x^2 + y^2} = y \operatorname{cotg} \beta = y \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$y\, dy = (-x + \sqrt{x^2 + y^2})\, dx;$$

on trouve par intégration

$$y^2 = C^2 + 2Cx.$$

Intégrer les équations différentielles linéaires suivantes:

57. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. Rép. $2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2$.

58. $y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$. Rép. $y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$.

59. $(x - x^3)\, y' + (2x^2 - 1)\, y - ax^3 = 0$. Rép. $y = ax + Cx\sqrt{1 - x^2}$.

60. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1$. Rép. $s = \sin t + C \cos t$.

61. $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$. Rép. $s = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}$.

62. $y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n$. Rép. $y = x^n (e^x + C)$.

63. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}$. Rép. $x^n y = ax + C$.

64. $y' + y = e^{-x}$. Rép. $e^x y = x + C$.

65. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$. Rép. $y = x^2 (1 + Ce^{\frac{1}{x}})$.

Intégrer les équations de Bernoulli:

66. $y' + xy = x^3 y^3$. Rép. $y^2 (x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$.

67. $(1 - x^2)\, y' - xy - axy^2 = 0$. Rép. $(C\sqrt{1 - x^2} - a)\, y = 1$.

68. $3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0$. Rép. $a^2 y^3 = Ce^{ax} - a(x+1) - 1$.

69. $y'(x^2 y^3 + xy) = 1$. Rép. $x[(2 - y^2)\, e^{\frac{1}{2}y^2} + C] = e^{\frac{1}{2}y^2}$.

70. $(y \operatorname{Log} x - 2)\, y\, dx = x\, dy$. Rép. $y\,(Cx^2 + \operatorname{Log} x^2 + 1) = 4$.

71. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1 - \sin x)$. Rép. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + C}$.

Intégrer les équations suivantes aux différentielles totales:

72. $(x^2 + y)\, dx + (x - 2y)\, dy = 0$. Rép. $\dfrac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$.

73. $(y - 3x^2)\, dx - (4y - x)\, dy = 0$. Rép. $2y^2 - xy + x^3 = C$.

74. $(y^3 - x)\, y' = y$. Rép. $y^4 = 4xy + C$.

75. $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right] dx + \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right] dy = 0$.

Rép. $\operatorname{Log} \dfrac{y}{x} - \dfrac{xy}{x-y} = C$.

76. $2\,(3xy^2 + 2x^3)\, dx + 3\,(2x^2y + y^2)\, dy = 0$. Rép. $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$.

77. $\dfrac{x\, dx + (2x + y)\, dy}{(x+y)^2} = 0$. Rép. $\operatorname{Log}(x+y) - \dfrac{x}{x+y} = C$.

78. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right) dx = \dfrac{2y\, dy}{x^3}$. Rép. $x^2 + y^2 = Cx^3$.

79. $\dfrac{x^2\, dy - y^2\, dx}{(x-y)^2} = 0$. Rép. $\dfrac{xy}{x-y} = C$.

80. $x\, dx + y\, dy = \dfrac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$. Rép. $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y} = C$.

81. Trouver les courbes jouissant de cette propriété que le produit du carré de la distance d'un point quelconque pris sur la courbe considérée à l'origine des coordonnées par le segment découpé par la normale sur l'axe des abscisses est égal au cube de l'abscisse du point. Rép. $y^2\,(2x^2 + y^2) = C$.

82. Trouver les enveloppes des familles de courbes suivantes:

a) $y = Cx + C^2$. Rép. $x^2 + 4y = 0$. b) $y = \dfrac{x}{C} + C^2$. Rép. $27x^2 = 4y^3$. c) $\dfrac{x}{C} - \dfrac{y}{C^3} = 2$. Rép. $27y = x^3$. d) $C^2x + Cy - 1 = 0$. Rép. $y^2 + 4x = 0$. e) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. Rép. $x = 0$; $y = 0$. f) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. Rép. $y^2 = 4x + 4$. g) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$. Rép. $(x - y)^2 = 8$. h) $Cx^2 + C^2y = 1$. Rép. $x^4 + 4y = 0$.

83. Une droite se déplace de telle manière que la somme des segments qu'elle découpe sur les axes de coordonnées est égale à une constante a. Chercher l'enveloppe de cette famille de droites. Rép. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (parabole).

84. Trouver l'enveloppe d'une famille de droites telles que les axes de coordonnées découpent sur ces droites des segments de longueur onstante a. Rép. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

85. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles dont les diamètres sont les doubles des ordonnées de la parabole $y^2 = 2px$. Rép. $y^2 = 2p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$.

86. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles centrés sur la parabole $y^2 = 2px$ et passant par le sommet de la parabole. Rép. La cissoïde $x^3 + y^2\,(x + p) = 0$.

87. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles dont les diamètres sont les cordes de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ perpendiculaires à l'axe Ox. Rép. $\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

88. Trouver la développée de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en tant qu'enveloppe de ses normales. Rép. $(ax)^{2/3} + (bx)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

Intégrer les équations suivantes (équations de Lagrange):

89. $y = 2xy' + y'^2$. Rép. $x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2}{3}p$; $y = \frac{2C - p^3}{3p}$.

90. $y = xy'^2 + y'^2$. Rép. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Intégrale singulière: $y = 0$.

91. $y = x(1 + y') + (y')^2$. Rép. $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(p + 1)e^{-p} - p^2 + 2$.

92. $y = yy'^2 + 2xy'$. Rép. $4Cx = 4C^2 - y^2$.

93. Trouver la courbe à normale constante. Rép. $(x - C)^2 + y^2 = a^2$. Intégrale singulière: $y = \pm a$.

Intégrer les équations de Clairaut:

94. $y = xy' + y' - y'^2$. Rép. $y = Cx + C - C^2$. Intégrale singulière: $4y = (x + 1)^2$.

95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. Rép. $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$. Intégrale singulière: $y^2 - x^2 = 1$.

96. $y = xy' + y'$. Rép. $y = Cx + C$.

97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$. Rép. $y = Cx + \frac{1}{C}$. Intégrale singulière: $y^2 = 4x$.

98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$. Rép. $y = Cx - \frac{1}{C^2}$. Intégrale singulière: $y^3 = -\frac{27}{4}x^2$.

99. L'aire du triangle formé par la tangente à une courbe et les axes de coordonnées est constante. Trouver cette courbe. Rép. L'hyperbole équilatère $4xy = \pm a^2$, ainsi que les droites de la famille $y = Cx \pm a\sqrt{C}$.

100. Trouver une courbe telle que le segment de sa tangente compris entre les axes de coordonnées ait une longueur constante a. Rép. $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$.

Solution singulière: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

101. Trouver une courbe telle que la somme des segments découpés par ses tangentes sur les axes de coordonnées soit égale à la constante $2a$. Rép. $y = Cx - \frac{2aC}{1-C}$. Solution singulière: $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

102. Trouver les courbes telles que le produit des distances de deux points donnés à la tangente soit constant. Rép. Des ellipses et des hyperboles. (Trajectoires orthogonales et isogonales.)

103. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $y = ax^n$. Rép. $x^2 + ny^2 = C$.

104. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles $y^2 = 2p(x - \alpha)$ (α est le paramètre de la famille). Rép. $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $x^2 - y^2 = \alpha$ (α étant le paramètre). Rép. $y = \frac{C}{x}$.

106. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de cercles $x^2 + y^2 = 2ax$. Rép. Les cercles $y = C(x^2 + y^2)$.

107. Trouver les trajectoires orthogonales des paraboles égales tangentes en leurs sommets à une droite donnée. Rép. Si le paramètre des paraboles est $2p$ et si Oy est la droite donnée, l'équation des trajectoires sera $y + C = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}x^{3/2}$.

108. Trouver les trajectoires orthogonales des cissoïdes $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. Rép. $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

109. Trouver les trajectoires orthogonales des lemniscates $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$. Rép. $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

110. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de courbes $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, où a est un paramètre variable, sachant que l'angle entre les courbes et leurs trajectoires est $\omega = 60°$.

Solution. On trouve l'équation différentielle de la famille de courbes $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ et l'on remplace y' par l'expression $q = \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}$. Si $\omega = 60°$, on a $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,y'}$ et on obtient l'équation différentielle $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$. L'intégrale générale $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ donne la famille des trajectoires cherchées.

111. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de paraboles $y^2 = 4Cx$, sachant que $\omega = 45°$. Rép. $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2y - x}{x\sqrt{7}}}$.

112. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de droites $y = Cx$ pour $\omega = 30°$, $45°$. Rép. Les spirales logarithmiques

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = e^{2\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}, \\ x^2 + y^2 = e^{2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}. \end{cases}$$

113. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Eliminer C_1 et C_2. Rép. $y'' - y = 0$.

114. Ecrire l'équation différentielle de tous les cercles d'un plan. Rép. $(1 + y'^2)\,y''' - 3y'y''^2 = 0$.

115. Ecrire l'équation différentielle de toutes les coniques à centres ayant pour axes principaux Ox, Oy. Rép. $x(yy'' + y'^2) - y'y = 0$.

116. On se donne l'équation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ et sa solution générale $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$. On demande: 1) de vérifier que la famille de courbes données est bien la solution générale; 2) de trouver la solution particulière correspondant à $x = 0$: $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -1$. Rép. $y = \frac{1}{6}(9e^x + e^{-x} - 4e^{2x})$.

117. On se donne l'équation différentielle $y'' = \frac{1}{2y'}$ et sa solution générale $y = \pm\frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$.

1) Vérifier que la famille de courbes données est bien l'intégrale générale; 2) trouver la courbe intégrale passant par le point (1, 2) et dont la tangente en ce point forme avec l'axe positif Ox un angle de 45°. Rép. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}$.

Intégrer les équations différentielles simples suivantes se ramenant à des équations du premier ordre:

118. $xy''' = 2$. Rép. $y = x^2 \operatorname{Log} x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $x = 1$, $y = 1$, $y' = 1$, $y'' = 3$. Rép. $y = x^2 \operatorname{Log} x + 1$.

119. $y^{(n)} = x^m$. Rép. $y = \frac{m!\, x^{m+n}}{(m+n)!} + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$.

120. $y'' = a^2 y$. Rép. $ax = \operatorname{Log}\left(ay + \sqrt{a^2y^2 + C_1}\right) + C_2$ ou $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$.

121. $y'' = \frac{a}{y^3}$. Rép. $(C_1 x + C_2)^2 = C_1 y^2 - a$.

Dans les exemples 122-125, écrire la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $x = 0$, $y = -1$, $y' = 0$.

122. $xy'' - y' = x^2 e^x$. Rép. $y = e^x(x-1) + C_1 x^2 + C_2$. Solution particulière: $y = e^x(x-1)$.

123. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$. Rép. $y + C_1 \operatorname{Log} y = x + C_2$. Solution particulière: $y = -1$.

124. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. Rép. $y = C_2 + C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x$. Solution particulière: $y = 2\sin x - \sin x \cos x - x - 1$.

125. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$. Rép. $y = C_2 - a \cos(x + C_1)$. Solutions particulières: $y = a - 1 - a\cos x$; $y = a\cos x - (a+1)$.
(Indication. Forme paramétrique $y'' = a\cos t$, $y' = a \sin t$.)

126. $y'' = \frac{1}{2y'}$. Rép. $y = \pm\frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$.

127. $y''' = y''^2$. Rép. $y = (C_1 - x)[\operatorname{Log}(C_1 - x) - 1] + C_2 x + C_3$.

128. $y'y''' - 3y''^2 = 0$. Rép. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

Intégrer les équations linéaires différentielles suivantes à coefficients constants:

129. $y'' = 9y$. Rép. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

130. $y'' + y = 0$. Rép. $y = A\cos x + B \sin x$.

131. $y'' - y' = 0$. Rép. $y = C_1 + C_2 e^x$.

132. $y'' + 12y = 7y'$. Rép. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

133. $y'' - 4y' + 4y = 0$. Rép. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

134. $y'' + 2y' + 10y = 0$. Rép. $y = e^{-x}(A\cos 3x + B \sin 3x)$.

135. $y'' + 3y' - 2y = 0$. Rép. $y = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$.

136. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. Rép. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3/2x}$.

137. $y'' + y' + y = 0$. Rép. $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

138. Deux masses identiques sont suspendues à un ressort à boudin. On suppose que l'une des masses se détache et on demande de trouver le mouvement de l'autre. Rép. $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right)$, où a est l'allongement du ressort sous l'action d'une seule masse au repos.

139. Un point matériel de masse m est sollicité par deux centres, les forces étant proportionnelles à la distance. Le coefficient de proportionnalité est k. La distance entre les deux centres est $2c$. Le corps se trouve à l'instant initial sur la ligne des centres à la distance a du milieu. La vitesse initiale est nulle. Trouver la loi du mouvement du point. Rép. $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t\right)$.

140. $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0$. Rép. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Rép. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

142. $y''' - 3ay'' + 3a^2 y' - a^3 y = 0$. Rép. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{ax}$.

143. $y^{V} - 4y''' = 0$. Rép. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$.

144. $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$. Rép. $y = (C_1 \cos \sqrt{2}\, x + C_2 \sin \sqrt{2}\, x)e^{-x} + (C_3 \cos \sqrt{2}\, x + C_4 \sin \sqrt{2}\, x)e^{x}$.

145. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. Rép. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\, xe^{2x} + C_4xe^{-2x}$.

146. $y^{IV} + y = 0$. Rép. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

147. $y^{IV} - a^4y = 0$. Trouver la solution générale et mettre en évidence la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$. Rép. Solution générale: $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Solution particulière: $y_0 = \cos ax$.

Intégrer les équations différentielles avec seconds membres; trouver la solution générale;

148. $y'' - 7y' + 12y = x$. Rép. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{12x+7}{144}$.

149. $s'' - a^2s = t + 1$. Rép. $s = C_1e^{at} + C_2e^{-at} - \frac{t+1}{a^2}$.

150. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$. Rép. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{5}(6 \sin 2x + 2 \cos 2x)$.

151. $y'' - y = 5x + 2$. Rép. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - 5x - 2$.

152. $s'' - 2as' + a^2s = e^t$ $(a \neq 1)$. Rép. $s = C_1e^{at} + C_2te^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2}$.

153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. Rép. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}$.

154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. Rép. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$.

155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$. Rép. $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$.

156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. Rép. $y = e^{x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41}(5 \cos x - 4 \sin x)$.

157. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$. Rép. $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{x}{2} \cos 2x$.

158. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. Rép. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$.

159. $y^{IV} - a^4y = 5a^4e^{ax} \sin ax$. Rép. $y = (C_1 - \sin ax)\, e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$.

160. $y^{IV} + 2a^2y'' + a^4y = 8 \cos ax$. Rép. $y = (C_1 + C_2x) \cos ax + (C_3 + C_4x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.

161. Trouver la courbe intégrale de l'équation $y'' + k^2y = 0$ passant par le point $M(x_0, y_0)$ et tangente en ce point à la droite $y = ax$. Rép. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$.

162. Trouver la solution de l'équation $y''+2hy'+n^2y=0$, satisfaisant aux conditions initiales $y=a$, $y'=C$ pour $x=0$.

Rép. Si $h<n$, $y=e^{-hx}\left(a\cos\sqrt{n^2-h^2}\,x+\frac{C+ah}{\sqrt{n^2-h^2}}\sin\sqrt{n^2-h^2}\,x\right)$;

si $h=n$, $y=e^{-hx}[(C+ah)x+a]$;

si $h>n$, $y=\frac{C+a(h+\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h-\sqrt{h^2-n^2})x}-$

$$-\frac{C+a(h-\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h+\sqrt{h^2-n^2})x}.$$

163. Trouver la solution de l'équation $y''+n^2y=h\sin px$ $(p\neq n)$, satisfaisant aux conditions: $y=a$, $y'=C$ lorsque $x=0$.

Rép. $y=a\cos nx+\frac{C(n^2-p^2)-hp}{n(n^2-p^2)}\sin nx+\frac{h}{n^2-p^2}\sin px.$

164. Un poids de 4 kg accroché à un ressort l'allonge de 1 cm. Trouver la loi du mouvement du poids, sachant que l'extrémité supérieure du ressort effectue des oscillations harmoniques $y=\sin\sqrt{100\,g}\,t$, y étant l'élongation verticale.

S o l u t i o n. Soit x la coordonnée verticale du poids comptée à partir de la position de repos. On a:

$$\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y-l),$$

où l est la longueur du ressort détendu et $k=400$, comme il résulte des conditions initiales. On en déduit $\frac{d^2x}{dt^2}+100\,gx=100\,g\sin\sqrt{100\,g}\,t+$ $+100\,lg$. On cherchera une intégrale particulière de cette équation sous la forme

$$t(C_1\cos\sqrt{100g}\,t+C_2\sin\sqrt{100g}\,t)+l,$$

étant donné que le premier terme du second membre de l'équation entre dans la solution de l'équation homogène.

165. Dans le problème 139, la vitesse initiale est égale à v_0 et elle est dirigée perpendiculairement à la droite entre les centres. Trouver la trajectoire.

S o l u t i o n. Prenons l'origine des coordonnées au milieu du segment reliant les deux centres; les équations différentielles du mouvement s'écrivent:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(C-x)-k(C+x)=-2kx,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-2ky.$$

Conditions initiales à l'instant $t=0$:

$$x=a;\quad \frac{dx}{dt}=0;\quad y=0;\quad \frac{dy}{dt}=v_0.$$

On trouve en intégrant:

$$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right),\quad y=v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right);$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2 2k}{mv_0^2}=1\ \text{(ellipse)}.$$

166. Un tube horizontal tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω. Une bille glisse dans le tube sans frottement. Trouver la loi du mouvement de la bille sachant qu'à l'instant initial elle se trouve sur l'axe de rotation et sa vitesse initiale est v_0 (selon l'axe du tube).

Indication. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$.

Conditions initiales : $r=0$, $\frac{dr}{dt}=v_0$ lorsque $t=0$. On trouve en intégrant $r=\frac{v^0}{2\omega}[e^{\omega t}-e^{-\omega t}]$.

Appliquer la méthode de la variation des constantes à l'intégration des équations différentielles suivantes :

167. $y''-7y'+6y=\sin x$. Rép. $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

168. $y''+y=\sec x$. Rép. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\operatorname{Log}\cos x$.

169. $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. Rép. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$.

Intégrer les équations différentielles suivantes des divers types :

170. $yy''=y'^2+1$. Rép. $y=\frac{1}{2C_1}[e^{C_1(x-C_2)}+e^{-C_1(x-C_2)}]$.

171. $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. Rép. $\frac{xy}{x-y}=C$.

172. $y=xy'^2+y'^2$. Rép. $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$.

Solutions singulières : $y=0$; $x+1=0$.

173. $y''+x=\sec x$. Rép. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\operatorname{Log}\cos x$.

174. $(1+x^2)\,y'-xy-a=0$. Rép. $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$.

175. $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x$. Rép. $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$.

176. $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$. Rép. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$.

177. $xy'+y-y^2\operatorname{Log}x=0$. Rép. $(\operatorname{Log}x+1+Cx)\,y=1$.

178. $(2x+2y-1)\,dx+(x+y-2)\,dy=0$. Rép. $2x+y-3\operatorname{Log}(x+y+1)=C$.

179. $3e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$. Rép. $\operatorname{tg}y=C(1-e^x)^3$.

Intégrer les systèmes d'équations différentielles :

180. $\frac{dx}{dt}=y+1$, $\frac{dy}{dt}=x+1$. Indiquer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $x=-2$, $y=0$ pour $t=0$. Rép. $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-1$, $x=C_1e^t-C_2e^{-t}-1$. La solution particulière est : $x^*=-e^{-t}-1$, $y^*=e^{-t}-1$.

181. $\frac{dx}{dt}=x-2y$, $\frac{dy}{dt}=x-y$. Indiquer la solution particulière correspondant aux conditions initiales $x=1$, $y=1$ pour $t=0$. Rép. $y=C_1\cos t+C_2\sin t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t$. Solution particulière : $x^*=\cos t-\sin t$, $y^*=\cos t$.

182. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\sin t, \\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t. \end{cases}$ Rép. $x=C_1e^{-t}=C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t$.

183. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}=x, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=y. \end{cases}$ Rép. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t,$
$y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$

184. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+x=e^t, \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}=1. \end{cases}$ Rép. $x=C_1+C_2t+C_3t^2-\dfrac{1}{6}t^3+e^t,$
$y=C_4-(C_1+2C_3)t-\dfrac{1}{2}(C_2-$
$-1)t^2-\dfrac{1}{3}C_3t^3+\dfrac{1}{24}t^4-e^t.$

185. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z-y, \\ \dfrac{dz}{dx}=-y-3z. \end{cases}$ Rép. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x},$
$z=(C_2-C_1-C_2x)e^{-2x}.$

186. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+z=0, \\ \dfrac{dz}{dx}+4y=0. \end{cases}$ Rép. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x},$
$z=-2(C_1e^{2x}-C_2e^{-2x}).$

187. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x, \\ \dfrac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x. \end{cases}$ Rép. $y=C_1+C_2x+2\sin x,$
$z=-2C_1-C_2(2x+1)-$
$-3\sin x-2\cos x.$

188. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y. \end{cases}$ Rép. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t},$
$y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t},$
$z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}.$

189. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-x}. \end{cases}$ Rép. $z=C_2e^{C_1x},$
$y=x+\dfrac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}.$

190. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$ Rép. $\dfrac{z}{y}=C_1,$
$zy^2-\dfrac{3}{2}x^2=C_2.$

Etudier la stabilité de la solution $x=0$, $y=0$ pour les systèmes d'équations différentielles suivants :

191. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+6y. \end{cases}$ Rép. Instable.

192. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$ Rép. Stable.

193. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$ Rép. Instable.

194. Trouver les valeurs approchées des solutions de l'équation $y' = y^2 + x$, vérifiant les conditions initiales: $y = 1$ pour $x = 0$. Trouver les valeurs des solutions pour les valeurs $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$. Rép. $y_{x=0,5} = 2{,}235$.

195. Trouver la valeur approchée $y_{x=1,4}$ de la solution de l'équation $y' + \frac{1}{x} y = e^x$ vérifiant les conditions initiales: $y = 1$ pour $x = 1$. Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte.

196. Trouver les valeurs approchées $x_{t=1,4}$ et $y_{t=1,4}$ des solutions du système d'équations $\frac{dx}{dt} = y - x$, $\frac{dy}{dt} = -x - 3y$ vérifiant les conditions initiales: $x = 0$, $y = 1$ pour $t = 1$. Comparer les résultats obtenus avec les valeurs exactes.

Chapitre XIV

INTÉGRALES MULTIPLES

§ 1. Intégrale double

Soit dans le plan Oxy un domaine fermé *) D limité par une courbe L.

Soit donnée dans le domaine D une fonction continue

$$z = f(x, y).$$

Partageons le domaine D en n domaines partiels par des courbes quelconques:

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \ldots, \Delta s_n$$

(fig. 292). Pour ne pas alourdir l'écriture, nous désignerons également par $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$ les aires de ces petits domaines. Choisissons dans chaque Δs_i un point P_i arbitraire (intérieur ou sur la frontière); on aura donc n points:

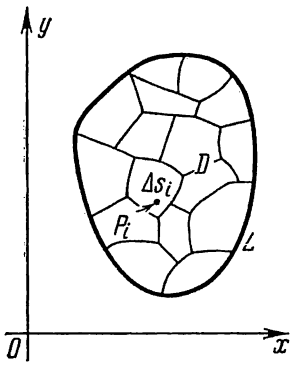


Fig. 292

$$P_1, P_2, \ldots, P_n.$$

Soient $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$ les valeurs de la fonction en ces points; formons la somme de produits $f(P_i)\,\Delta s_i$:

$$V_n = f(P_1)\,\Delta s_1 + f(P_2)\,\Delta s_2 + \ldots$$

$$\ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i \qquad (1)$$

qui est appelée *somme intégrale* de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D.

Si $f \geqslant 0$ dans D, on pourra se représenter géométriquement chaque terme $f(P_i)\,\Delta s_i$ comme le volume du cylindre élémentaire de base Δs_i et de hauteur $f(P_i)$.

La somme V_n est la somme des volumes des cylindres élémentaires, c.-à-d. le volume du corps en « escalier » représenté sur la fig. 293.

*) Un domaine D est dit fermé s'il est limité par une courbe fermée et si l'on considère que les points frontières appartiennent au domaine.

Considérons une suite arbitraire de sommes intégrales formées pour la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D

$$V_{n_1},\ V_{n_2},\ \ldots,\ V_{n_k},\ \ldots \tag{2}$$

pour divers découpages de D en domaines partiels Δs_i. On supposera que le plus grand diamètre des Δs_i tend vers zéro lorsque $n_k \to \infty$. On a alors le théorème suivant que nous ne démontrerons pas.

Théorème 1. *La fonction $f(x, y)$ étant continue dans le domaine fermé D, la suite* (2) *de sommes intégrales* (1) *a une limite lorsque le plus grand diamètre des domaines partiels Δs_i tend vers zéro*

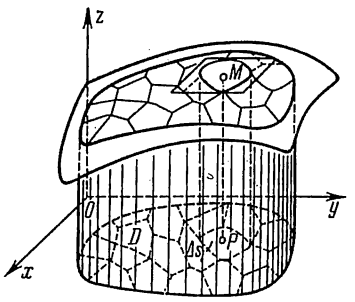


Fig.293

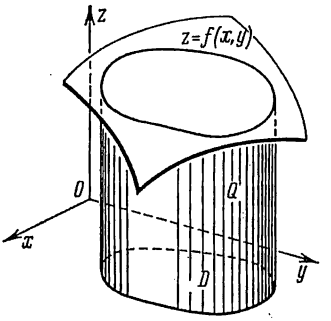


Fig. 294

et que $n \to \infty$. Cette limite est la même quelle que soit la suite (2), *c.-à-d. qu'elle ne dépend ni du mode de découpage de D en domaines partiels Δs_i ni du choix du point P_i dans Δs_i.*

Cette limite est appelée *intégrale double* de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine D et on la désigne par

$$\iint_D f(P)\,ds \quad \text{ou} \quad \iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

c.-à-d.

$$\lim_{\operatorname{diam} \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

D est appelé le *domaine d'intégration.*

Si $f(x, y) \geqslant 0$, l'intégrale double de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine D est égale au volume Q du corps limité par la surface $z = f(x, y)$, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et s'appuient sur la frontière de D (fig. 294).

Considérons encore les théorèmes suivants sur l'intégrale double.

Théorème 2. *L'intégrale double de la somme de deux fonctions* $\varphi(x, y) + \psi(x, y)$ *sur un domaine* D *est égale à la somme des intégrales doubles de chacune des deux fonctions étendues à ce domaine :*

$$\iint_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)]\, ds = \iint_D \varphi(x, y)\, ds + \iint_D \psi(x, y)\, ds.$$

Théorème 3. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe d'intégration double :*
si $a = \text{const}$, *on a*

$$\iint_D a\varphi(x, y)\, ds = a \iint_D \varphi(x, y)\, ds.$$

On démontre ces deux théorèmes exactement comme les théorèmes correspondants sur les intégrales définies (voir t. I, ch. XI, § 3).

Théorème 4. *Si le domaine* D *est constitué de deux domaines partiels* D_1 *et* D_2 *sans point intérieur commun et si* $f(x, y)$ *est continue en tous les points de* D, *on a*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

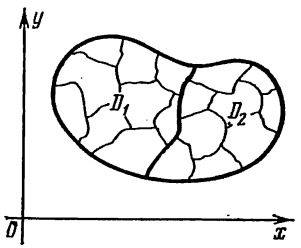


Fig. 295

Démonstration. On peut représenter la somme intégrale dans D sous la forme (fig. 295)

$$\sum_D f(P_i)\, \Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i)\, \Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i)\, \Delta s_i, \qquad (4)$$

la première somme contenant les termes relatifs aux domaines partiels de D_1 et la seconde, les termes relatifs aux domaines partiels de D_2. En effet, l'intégrale double ne dépendant pas du mode de découpage, nous découperons le domaine D de telle façon que la frontière commune de D_1 et de D_2 soit aussi une frontière des domaines partiels Δs_i. Passant dans l'égalité (4) à la limite lorsque $\Delta s_i \to 0$, on obtient l'égalité (3). Ce théorème subsiste lorsque D est formé d'un nombre arbitraire de domaines disjoints sans points intérieurs communs.

§ 2. Calcul des intégrales doubles

Considérons un domaine D du plan Oxy tel que toute parallèle à l'un des axes de coordonnées, par exemple à Oy, et passant par un point intérieur *) du domaine coupe sa frontière en deux points N_1 et N_2 (fig. 296).

*) Un point *intérieur* est un point ne se trouvant pas sur la frontière.

Nous supposerons que, dans le cas considéré, D est limité par les courbes $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et que

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad a < b,$$

les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ étant continues sur le segment $[a, b]$. Nous conviendrons d'appeler ce domaine *régulier selon l'axe Oy*. On définit de la même manière un domaine *régulier selon l'axe Ox*.

Un domaine régulier selon les deux axes de coordonnées sera dit simplement *domaine régulier*. La fig. 296 donne un exemple de domaine régulier.

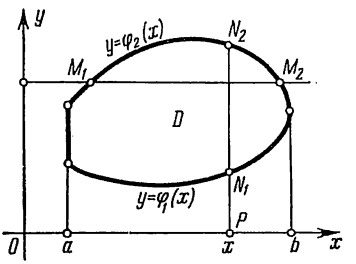


Fig. 296

Supposons $f(x, y)$ continue dans D. Considérons l'expression

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

que nous appellerons *intégrale double* ou *somme double* de la fonction $f(x, y)$ sur D. Dans cette expression, on calcule d'abord l'intégrale entre parenthèses, l'intégration étant faite par rapport à y, et x étant considéré comme constant. On trouve après intégration une fonction continue *) de x:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Intégrons maintenant cette fonction par rapport à x entre les bornes a et b:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\, dx.$$

On trouve en définitive un nombre constant.

Exemple. Calculer l'intégrale double

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx.$$

Solution. Calculons d'abord l'intégrale interne (entre parenthèses):

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^{x^2} =$$

$$= x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

*) Nous ne démontrerons pas la continuité de la fonction $\Phi(x)$.

Intégrons maintenant la fonction obtenue de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \left(x^4+\frac{x^6}{3}\right) dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{3\cdot 7}\right)_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Le domaine d'intégration D est le domaine limité par les courbes (fig. 297)

$$y=0,\quad x=0,\quad y=x^2,\quad x=1.$$

Il arrive que le domaine D est tel que l'une des fonctions $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ne peut être donnée par une seule expression

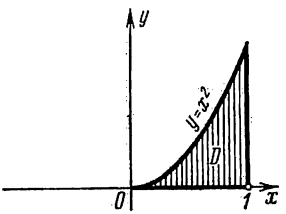


Fig. 297

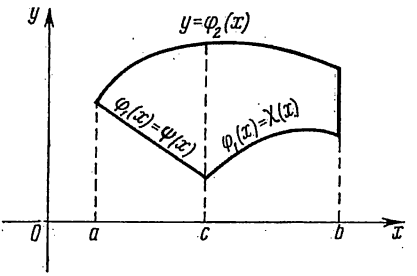


Fig. 298

analytique dans tout l'intervalle de variation de x (de $x = a$ à $x = b$). Soit, par exemple, $a < c < b$ et

$$\varphi_1(x) = \psi(x) \text{ sur le segment } [a, c],$$
$$\varphi_1(x) = \chi(x) \text{ sur le segment } [c, b],$$

$\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant des fonctions données analytiquement (fig. 298). On écrira alors l'intégrale double comme suit :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx =$$
$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx =$$
$$= \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx.$$

On a écrit la première égalité en vertu de la propriété connue des intégrales définies et la seconde parce que l'on a $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$ sur le segment $[a, c]$ et $\varphi_1(x) \equiv \chi(x)$ sur $[c, b]$.

Une transcription analogue pour l'intégrale double a lieu lorsque la fonction $\varphi_2(x)$ se décompose en différentes expressions analytiques sur le segment $[a, b]$.

Etablissons quelques propriétés des intégrales doubles.

P r o p r i é t é 1. *Si l'on divise un domaine D régulier selon Oy en deux domaines D_1 et D_2 par une parallèle à l'axe Oy ou à l'axe Ox, l'intégrale double I_D sur D est égale à la somme d'intégrales analogues sur D_1 et D_2:*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \tag{1}$$

D é m o n s t r a t i o n. a) Supposons que la droite $x = c$ $(a < c < b)$ partage le domaine D en deux domaines réguliers selon Oy *) D_1 et D_2. Alors

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)\, dx =$$

$$= \int_a^c \Phi(x)\, dx + \int_c^b \Phi(x)\, dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

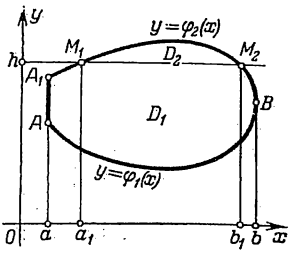


Fig. 299

b) Supposons que la droite $y = h$ partage le domaine D en deux domaines réguliers D_1 et D_2 selon Oy comme sur la figure 299. Désignons par M_1 et M_2 les points d'intersection de la droite $y = h$ avec la frontière L de D. Désignons les abscisses de ces points par a_1 et b_1.

Le domaine D_1 est limité par les courbes continues:

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) la courbe $A_1M_1M_2B$ dont nous écrirons conventionnellement l'équation sous la forme

$$y = \varphi_1^*(x),$$

ayant en vue que $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ lorsque $a \leqslant x \leqslant a_1$ et $b_1 \leqslant x \leqslant b$ et que

$$\varphi_1^*(x) = h \quad \text{lorsque} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1;$$

3) les droites $x = a$, $x = b$.

---

*) Le fait qu'une partie de la frontière du domaine D_1 (et du domaine D_2) soit un segment vertical n'empêche pas ce domaine d'être régulier selon Oy; car on exigeait à cet effet que toute verticale passant par un point intérieur du domaine ne coupe pas la frontière en plus de deux points.

Le domaine D_2 est limité par les courbes

$$y = \varphi_1^*(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad \text{où} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1.$$

Ecrivons l'identité suivante en appliquant à l'intégrale intérieure le théorème sur la décomposition de l'intervalle d'intégration :

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Décomposons la dernière intégrale en trois intégrales en appliquant le même théorème à l'intégrale extérieure :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_{b_1}^{b} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx ;$$

comme $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ sur le segment $[a, a_1]$ et sur le segment $[b_1, b]$, la première et la troisième intégrale sont identiquement nulles. Par suite,

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Le premier terme est ici une intégrale double étendue à D_1 et le second une intégrale double étendue à D_2. Par conséquent,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

La démonstration est analogue quelle que soit la sécante M_1M_2. Si la droite M_1M_2 partage D en trois domaines ou plus, on obtient une relation analogue à (1) avec dans le second membre un nombre correspondant de termes.

C o r o l l a i r e. On peut partager chacun des domaines obtenus en des domaines réguliers selon Oy par une parallèle à Oy ou Ox et leur appliquer l'égalité (1). Par conséquent, on peut partager

le domaine D par des parallèles aux axes de coordonnées en un nombre arbitraire de domaines partiels réguliers

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots,\ D_i,$$

et on pourra toujours affirmer que *l'intégrale double étendue au domaine D est égale à la somme d'intégrales doubles étendues aux domaines partiels* (fig. 300)

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_i}. \tag{2}$$

Propriété 2. (Evaluation des intégrales doubles.) *Soient m et M la plus petite et la plus grande valeur*

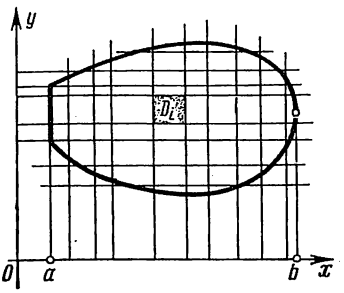


Fig. 300

de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D. Soit S l'aire de D. On a l'inégalité

$$mS \leqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant MS. \tag{3}$$

Démonstration. Evaluons l'intégrale intérieure que nous désignerons par $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \leqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M\, dy = M\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

On a:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant \int_a^b M\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = MS,$$

c.-à-d.

$$I_D \leqslant MS. \tag{3'}$$

D'une manière analogue

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \geqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\,dy = m\,[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)],$$

$$I_D=\int_a^b \Phi(x)\,dx \geqslant \int_a^b m\,[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx = mS,$$

c.-à-d. que

$$I_D \geqslant mS. \tag{3''}$$

L'inégalité (3) résulte des inégalités (3′) et (3″):

$$mS \leqslant I_D \leqslant MS.$$

Nous interpréterons géométriquement ce théorème au paragraphe suivant.

Propriété 3. (Théorème de la moyenne.) *L'intégrale double I_D d'une fonction continue $f(x, y)$ sur un domaine D d'aire S est égale au produit de S par la valeur de la fonction en un certain point P du domaine D:*

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right) dx = f(P)\,S. \tag{4}$$

Démonstration. On déduit de (3):

$$m \leqslant \frac{1}{S} I_D \leqslant M.$$

Le nombre $\frac{1}{S} I_D$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D. En vertu de la continuité de $f(x, y)$ dans D, elle prend en un certain point P du pomaine D la valeur $\frac{1}{S} I_D$, c.-à-d. que

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

d'où

$$I_D = f(P)\,S. \tag{5}$$

§ 3. Calcul des intégrales doubles (suite)

Théorème. *L'intégrale double d'une fonction continue $f(x, y)$ étendue à un domaine régulier D a pour expression* *)

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \quad \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right) dx.$$

*) On suppose de nouveau que le domaine D est régulier selon Oy et limité par les courbes $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$.

Démonstration. Découpons le domaine D par des parallèles aux axes de coordonnées en n domaines réguliers (rectangulaires) :

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

On a en vertu de la propriété 1 [formule (2)] du paragraphe précédent :

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I_{\Delta s_2} + \ldots + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta s_i}. \tag{1}$$

Transformons chaque terme de droite par application du théorème de la moyenne sur les intégrales doubles :

$$I_{\Delta s_i} = f(P_i)\,\Delta s_i.$$

L'égalité (1) devient

$$I_D = f(P_1)\,\Delta s_1 + f(P_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i, \tag{2}$$

où P_i est un point dans Δs_i. On a à droite une somme intégrale pour la fonction $f(x, y)$ sur D. D'après le théorème d'existence des intégrales doubles, il résulte que la limite de cette somme, lorsque $n \to \infty$ et que le plus grand diamètre des domaines partiels Δs_i tend vers zéro, existe et est égale à l'intégrale double de la fonction $f(x, y)$ sur D. La valeur numérique de I_D du premier membre de l'égalité (2), résultant de deux intégrations simples successives, ne dépend pas de n. Passant donc à la limite dans (2), on obtient

$$I_D = \lim_{\operatorname{diam} \Delta s_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

ou

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = I_D. \tag{3}$$

On obtient en définitive :

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx. \tag{4}$$

Remarque 1. Lorsque $f(x, y) \geqslant 0$, la formule (4) admet une interprétation géométrique simple. Considérons le corps délimité par la surface $z = f(x, y)$, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à Oz et s'appuient sur la frontière du domaine D (fig. 301). Calculons le volume V de ce corps. Nous avons indiqué plus haut que le volume de ce corps était égal à l'intégrale double de $f(x, y)$ sur D :

$$V = \iint f(x, y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

Calculons maintenant le volume de ce corps en utilisant les résultats du § 4, chap. XII, t. I sur le calcul du volume d'un corps en fonction des aires des sections parallèles. Menons le plan sécant $x = \text{const}$ $(a < x < b)$. Calculons l'aire $S(x)$ de la figure obtenue

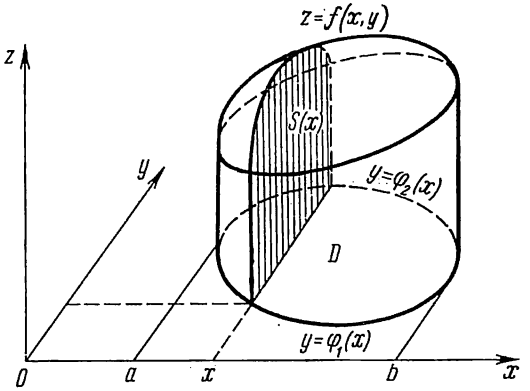


Fig. 301

dans le plan $x = \text{const}$. Cette figure est le trapèze curviligne délimité par les courbes $z = f(x, y)$ $(x = \text{const})$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Par conséquent, cette aire est exprimée par l'intégrale

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{6}$$

Connaissant les aires des sections parallèles, on trouve facilement le volume

$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$

ou, substituant l'expression (6), pour l'aire $S(x)$ on trouve :

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{7}$$

Les premiers membres des formules (5) et (7) sont égaux, il en est donc de même des seconds membres

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Il n'est plus difficile à présent de donner le sens géométrique du théorème sur l'évaluation des intégrales doubles (propriété 2 du paragraphe précédent) : le volume V du corps délimité par la surface $z = f(x, y)$, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique ayant pour directrice la frontière du domaine D est supérieur au volume du cylindre de base S et de hauteur m, mais inférieur au volume du

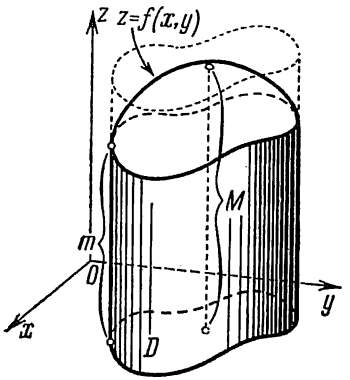


Fig. 302

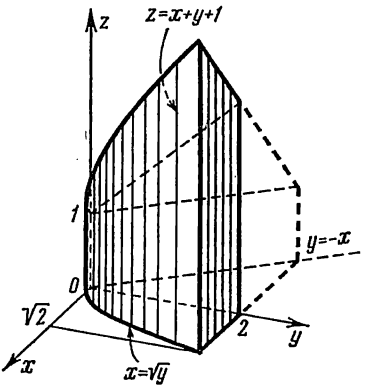


Fig. 303

cylindre de base S et de hauteur M (m et M étant la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = f(x, y)$ dans le domaine D (fig. 302)). Ceci résulte du fait que l'intégrale double I_D est égale au volume V de ce corps.

Exemple 1. Calculer l'intégrale double $\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$, sachant que le domaine D est limité par les droites $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$.

Solution.

$$V = \int_0^{3/2} \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y^2)\, dx \right] dy = \int_0^{3/2} \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^{3/2} \left(4 - \frac{1}{3} - y^2 \right) dx = \left(4y - \frac{1}{3} y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{3/2} = \frac{35}{8}.$$

Exemple 2. Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x, y) = 1 + x + y$ sur le domaine limité par les courbes $y = -x$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$, $z = 0$ (fig. 303).

Solution.

$$V=\int_0^2\left[\int_{-y}^{\sqrt{y}}(1+x+y)\,dx\right]dy=\int_0^2\left[x+\frac{x^2}{2}+xy\right]_{-y}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int_0^2\left[\left(\sqrt{y}+\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right)-\left(-y+\frac{y^2}{2}-y^2\right)\right]dy=$$

$$=\int_0^2\left[\sqrt{y}+\frac{3y}{2}+y\sqrt{y}+\frac{y^2}{2}\right]dy=$$

$$=\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3y^2}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{y^3}{6}\right]_0^2=\frac{44}{15}\sqrt{2}+\frac{13}{3}.$$

Remarque 2. Supposons un domaine D régulier selon Ox délimité par les courbes

$$x=\psi_1(y),\ x=\psi_2(y),\ y=c,\ y=d,$$

avec $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$ (fig. 304).

On a alors évidemment

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,\ y)\,dx\right)dy. \qquad (8)$$

Pour calculer une intégrale double, on appliquera, selon le cas, la formule (4) ou la formule (8). Le choix est indiqué par la forme du domaine D ou de la fonction à intégrer.

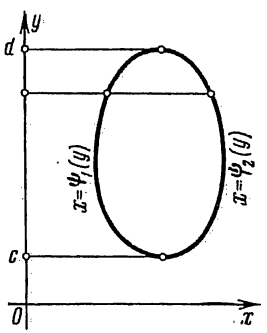


Fig. 304

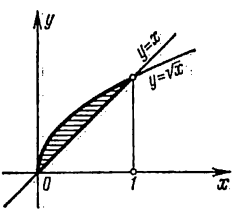


Fig. 305

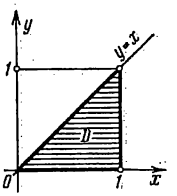


Fig. 306

Exemple 3. Intervertir l'ordre d'intégration dans

$$I=\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Solution. Le domaine d'intégration est limité par la droite $y=x$ et la parabole $y=\sqrt{x}$ (fig. 305).

Toute droite parallèle à l'axe Ox coupe la frontière du domaine en deux points au plus; on pourra donc appliquer la formule (8) en posant

$$\psi_1(y) = y^2, \quad \psi_2(y) = y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

on a

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x, y)dx \right) dy.$$

Exemple 4. Calculer $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}} ds$, sachant que le domaine D est le triangle limité par les droites $y=x$, $y=0$, $x=1$ (fig. 306).

Solution. Appliquons la formule (4). (Si l'on appliquait la formule (8), il nous faudrait intégrer la fonction $e^{\frac{y}{x}}$ par rapport à x; mais cette dernière intégrale ne s'intègre pas au moyen des fonctions élémentaires):

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}} ds = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(xe^{\frac{y}{x}}\right)\Big|_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 x(e-1)\, dx = (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0{,}859\ldots$$

Remarque 3. Si le domaine D n'est régulier ni selon Ox ni selon Oy (c.-à-d. s'il existe des verticales et des horizontales pas-

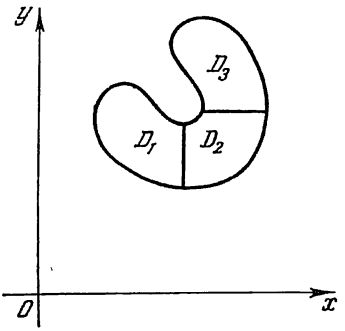


Fig. 307

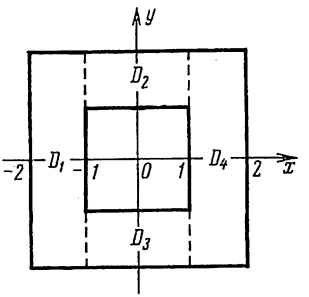


Fig. 308

sant par des points intérieurs du domaine et coupant la frontière du domaine en plus de deux points), on ne peut alors intégrer sans précaution. Si l'on arrive à découper le domaine irrégulier D en un nombre fini de domaines réguliers selon Ox ou Oy $D_1, D_2, \ldots, D_n$, on intégrera séparément dans chaque domaine partiel et on fera la somme des résultats obtenus.

On a donné sur la fig. 307 un découpage d'un domaine irrégulier D en trois domaines réguliers D_1, D_2 et D_3.

Exemple 5. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D e^{x+y}\,ds$$

étendue au domaine D compris entre deux carrés centrés à l'origine et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, sachant que les côtés sont respectivement égaux à 2 et à 4 (fig. 308).

Solution. Le domaine D est irrégulier. On le découpe en quatre domaines réguliers D_1, D_2, D_3, D_4 par les droites $x = -1$ et $x = 1$. On a donc

$$\iint_D e^{x+y}\,ds = \iint_{D_1} e^{x+y}\,ds + \iint_{D_2} e^{x+y}\,ds + \iint_{D_3} e^{x+y}\,ds + \iint_{D_4} e^{x+y}\,ds.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\,ds &= \int_{-2}^{-1}\left(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx + \\ &+ \int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{-1} e^{x+y}\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx = \\ &= (e^2-e^{-2})(e^{-1}-e^{-2}) + (e^2-e)(e-e^{-1}) + \\ &+ (e^{-1}-e^{-2})(e-e^{-1}) + (e^2-e^{-2})(e^2-e) = \\ &= (e^3-e^{-3})(e-e^{-1}) = 4\,\mathrm{sh}\,3\,\mathrm{sh}\,1.\end{aligned}$$

Remarque 4. Par la suite, nous omettrons les parenthèses dans l'intégrale double

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx,$$

et nous écrirons simplement :

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx,$$

l'intégration étant faite dans l'ordre où sont écrites les différentielles des coordonnées *).

---

*) Il est parfois commode d'écrire

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y)\,dy\right)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, \quad)\,dy.$$

§ 4. Application des intégrales doubles au calcul d'aires et de volumes

1. Volumes. Nous avons vu au § 1 que le volume V d'un corps limité par une surface $z = f(x, y)$, où $f(x, y)$ est une fonction non négative, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique de génératrices parallèles à Oz et dont la directrice est la frontière de D, est égal à l'intégrale double de $f(x, y)$ sur D:

$$V = \iint_D f(x, y)\, ds.$$

Exemple 1. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$ (fig. 309).

Solution.

$$V = \iint_D (1 - x - y)\, dy\, dx,$$

où D est le domaine triangulaire du plan Oxy limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; c'est le domaine hachuré de la fig. 309. On a:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[(1 - x)\, y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x)^2\, dx = \frac{1}{6}.$$

On a donc $V = \frac{1}{6}$ d'unité de volume.

Remarque 1. Si le corps dont on cherche le volume est limité supérieurement par la surface $z = \Phi_2(x, y) \geqslant 0$ et infé-

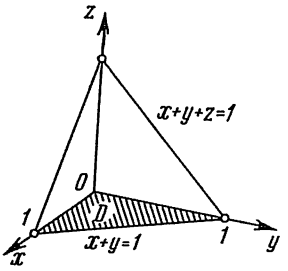


Fig. 309

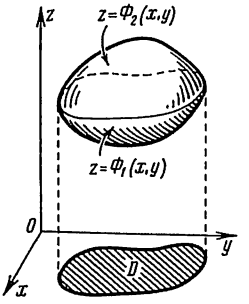


Fig. 310

rieurement par la surface $z = \Phi_1(x, y) \geqslant 0$, la projection de ces deux surfaces sur le plan Oxy étant un même domaine D, le volume V de ce corps sera égal à la différence des volumes des corps « cylindriques »; le premier cylindre a pour base D et est limité supérieurement par la surface $z = \Phi_2(x, y)$; le second cylindre a également pour base D et est limité supérieurement par la surface $z = \Phi_1(x, y)$ (fig. 310).

Le volume V est donc la différence de deux intégrales doubles :

$$V = \iint\limits_D \Phi_2(x, y)\, ds - \iint\limits_D \Phi_1(x, y)\, ds,$$

ou

$$V = \iint\limits_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)]\, ds. \qquad (1)$$

Il est facile de démontrer que la formule (1) est vraie non seulement lorsque $\Phi_1(x, y)$ et $\Phi_2(x, y)$ sont des fonctions non négatives, mais aussi lorsque $\Phi_1(x, y)$ et $\Phi_2(x, y)$ sont des fonctions continues arbitraires satisfaisant à la relation

$$\Phi_2(x, y) \geqslant \Phi_1(x, y).$$

Remarque 2. Si $f(x, y)$ change de signe dans D, on partagera D en deux domaines : 1) D_1 avec $f(x, y) \geqslant 0$; 2) D_2 avec $f(x, y) \leqslant 0$. Supposons D_1 et D_2 tels que les intégrales doubles sur

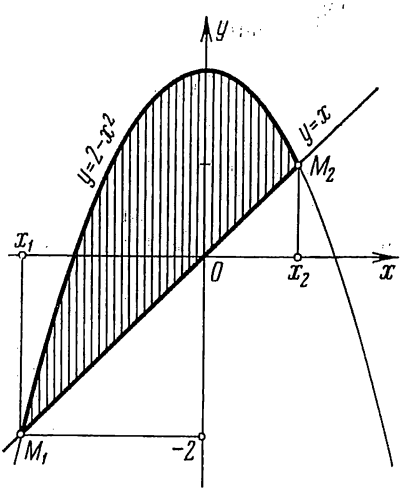


Fig. 311

ces domaines existent. L'intégrale sur D_1 est alors positive et représente le volume du corps se trouvant au-dessus du plan Oxy. L'intégrale sur D_2 est négative et sa valeur absolue représente le volume du corps se trouvant sous le plan Oxy. Par conséquent, l'intégrale sur D représente la différence des volumes correspondants.

2. Aires planes. Si l'on forme une somme intégrale pour la fonction $f(x, y) \equiv 1$ définie dans le domaine D, on obtient l'aire

$$S = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i,$$

quel que soit le découpage. Passant à la limite dans le second membre, on obtient

$$S = \iint_D dx\,dy.$$

Si le domaine D est régulier (voir, par exemple, fig. 296), l'aire s'exprime par l'intégrale double

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx.$$

On a après intégration de l'intégrale interne

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx$$

(comparez § 1, ch. XII, t. I).

Exemple 2. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes

$$y = 2 - x^2, \quad y = x.$$

Solution. Déterminons les points d'intersection des courbes données (fig. 311). Les ordonnées des deux courbes sont égales en un point d'intersection:

$$x = 2 - x^2,$$

d'où

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -2,$$

$$x_2 = 1.$$

Nous avons obtenu deux points d'intersection: $M_1(-2, -2)$, $M_2(1, 1)$.

L'aire cherchée est donc

$$S = \int_{-2}^{1} \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

§ 5. Intégrales doubles en coordonnées polaires

Considérons en coordonnées polaires θ, ρ un domaine D tel que tout rayon issu de l'origine et passant par un point intérieur du domaine coupe la frontière de D en deux points au plus. Supposons que D soit limité par les courbes $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ et les rayons $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, avec $\Phi_1(\theta) \leqslant \Phi_2(\theta)$ et $\alpha < \beta$ (fig. 312). Nous dirons aussi qu'un tel domaine est régulier.

Soit dans D une fonction continue des coordonnées θ et ρ:

$$z = F(\theta, \rho).$$

Découpons arbitrairement D en domaines partiels $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$.

Formons la somme intégrale

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\,\Delta s_k, \tag{1}$$

où P_k est un point pris dans Δs_k.

Il résulte du théorème d'existence des intégrales doubles que, lorsque le plus grand diamètre des Δs_k tend vers zéro, la somme intégrale (1) a une limite V. Elle donne par définition l'intégrale double de $F(\theta, \rho)$ dans D :

$$V = \iint_D F(\theta, \rho)\,ds. \tag{2}$$

Occupons-nous du calcul d'une telle intégrale double.

Comme la limite de la somme intégrale ne dépend pas du mode de découpage de D en domaines partiels Δs_k, nous le découperons, pour

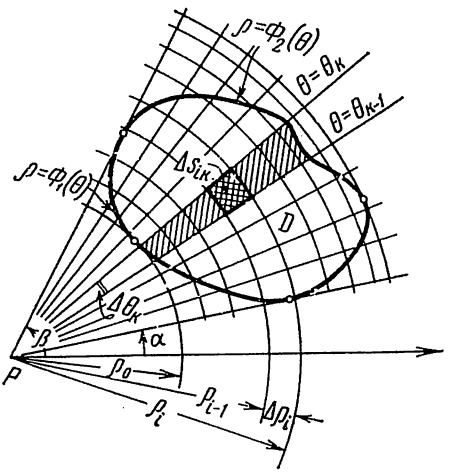


Fig. 312

raison de commodité, en menant des rayons $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2, \ldots, \theta = \theta_n$ (où $\theta_0 = \alpha$, $\theta_n = \beta$, $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$) et des circonférences concentriques $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_1, \ldots, \rho = \rho_m$ (où ρ_0 est la plus petite valeur de la fonction $\Phi_1(\theta)$ et ρ_m la plus grande valeur de $\Phi_2(\theta)$ dans l'intervalle fermé $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$; $\rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m$).

Soit Δs_{ik} l'aire délimitée par les lignes de coordonnées $\rho = \rho_{i-1}$, $\rho = \rho_i$, $\theta = \theta_{k-1}$, $\theta = \theta_k$.

Il y aura trois espèces de domaines partiels Δs_{ik} :

1) des domaines entièrement intérieurs à D ;
2) des domaines entièrement extérieurs à D ;
3) des domaines empiétant sur la frontière de D.

La somme des aires empiétant sur la frontière tend vers zéro lorsque $\Delta\theta_k \to 0$ et $\Delta\rho_i \to 0$; on négligera donc ces aires. Les aires partielles Δs_{ik} extérieures à D n'entrent pas dans la somme intégrale considérée et ne présentent pas d'intérêt. On pourra donc écrire la somme intégrale sous la forme

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(P_{ik})\,\Delta s_{ik}\right],$$

où P_{ik} est un point arbitraire pris dans Δs_{ik}.

La sommation double exprime que nous sommons d'abord sur l'indice i en considérant k fixe (c.-à-d. que nous faisons la somme

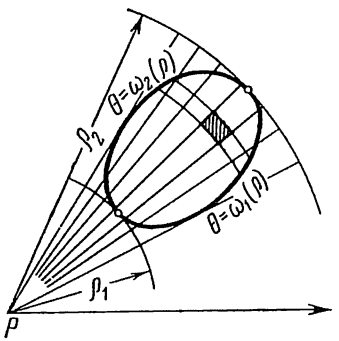


Fig. 313

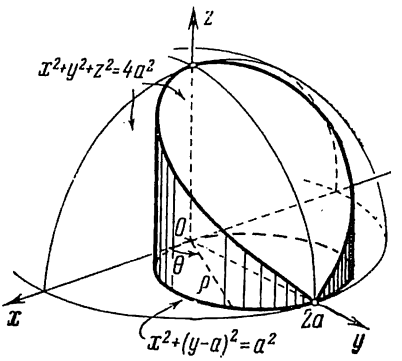


Fig. 314

des aires comprises entre deux rayons voisins *)). Le signe de sommation extérieur exprime que nous additionnons les sommes résultant de la première sommation (nous sommons sur k).

Trouvons l'expression de l'aire d'un domaine partiel Δs_{ik} n'empiétant pas sur la frontière de D. C'est la différence des aires de deux secteurs:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2\,\Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i\Delta\theta_k$$

ou

$$\Delta s_{ik} = \rho_i^*\Delta\rho_i\Delta\theta_k, \quad \text{où} \quad \rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta\rho_i.$$

La somme intégrale s'écrit donc **)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\,\rho_i^*\Delta\rho_i\Delta\theta_k\right],$$

où $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ est un point pris dans Δs_{ik}.

*) Notons que sommant sur l'indice i cet indice ne prendra pas forcément toutes les valeurs de 1 à m, étant donné que tous les domaines partiels compris entre les rayons $\theta = \theta_k$ et $\theta = \theta_{k+1}$ n'appartiennent pas forcément à D.

**) Il est permis de considérer une somme intégrale sous cette forme, étant donné que la limite de la somme ne dépend pas du point choisi dans le domaine partiel.

Sortons maintenant le facteur $\Delta\theta_k$ de la somme intérieure (ce qui est légitime, car c'est un facteur commun à tous les termes de cette somme) :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\rho_i^*\Delta\rho_i\right]\Delta\theta_k.$$

Supposons que $\Delta\rho_i \to 0$ et que $\Delta\theta_k$ est constant. Alors l'expression entre crochets tendra vers l'intégrale

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho)\rho\, d\rho.$$

Supposant maintenant que $\Delta\theta_k \to 0$ on obtient en définitive *) :

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\rho\, d\rho\right) d\theta. \tag{3}$$

La formule (3) sert au calcul des intégrales doubles en coordonnées polaires.

Si l'on intègre d'abord sur θ, puis sur ρ, on a la formule (fig. 313) :

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta, \rho)\, d\theta\right)\rho\, d\rho. \tag{3'}$$

Soit à calculer l'intégrale double de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine D, cette intégrale étant écrite en coordonnées rectangulaires :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si D est un domaine régulier en coordonnées polaires θ, ρ, on pourra passer dans les calculs aux coordonnées polaires.

On a, en effet,

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

$$f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \ \rho\sin\theta) = F(\theta, \rho),$$

*) Notre déduction de la formule (3) n'est pas rigoureuse ; nous avons d'abord fait tendre $\Delta\rho_i$ vers zéro en conservant $\Delta\theta_k$ invariable, et c'est seulement après que nous avons fait tendre $\Delta\theta$ vers zéro. Ceci ne correspond pas complètement à la définition de l'intégrale double que nous considérions comme la limite de sommes intégrales lorsque le plus grand diamètre des domaines partiels tendait vers zéro (ici il faudrait faire tendre vers zéro simultanément $\Delta\theta_k$ et $\Delta\rho_i$). Cependant, malgré ce manque de rigueur, le résultat est juste (c-à-d. que la formule (3) est légitime). On pourrait établir cette formule rigoureusement comme pour l'intégrale double en coordonnées rectangulaires. Indiquons qu'elle sera établie aussi au § 6 en partant d'autres considérations (comme cas particulier de la formule générale de transformation des coordonnées dans une intégrale double).

par conséquent,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho \right) d\theta. \qquad (4)$$

Exemple 1. Calculer de volume V du corps compris entre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

et le cylindre

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Solution. On pourra prendre pour domaine d'intégration la base du cylindre $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, c.-à-d. le cercle de centre $(0, a)$ et de rayon a. On peut écrire l'équation de ce cercle sous la forme $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ (fig. 314). Calculons le quart du volume cherché V (la moitié avant représentée sur la fig. 314). On prendra alors pour domaine d'intégration le demi-cercle défini par les équations

$$x = \varphi_1(y) = 0, \quad x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2},$$
$$y = 0, \quad y = 2a.$$

La fonction sous le signe somme est

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{4}V = \int\limits_0^{2a} \left(\int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dx \right) dy.$$

Passons en coordonnées polaires θ, ρ:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

Déterminons les bornes d'intégration. Ecrivons à cet effet l'équation du cercle donné en coordonnées polaires: comme

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$
$$y = \rho\sin\theta,$$

on a

$$\rho^2 - 2a\rho\sin\theta = 0$$

ou

$$\rho = 2a\sin\theta.$$

La frontière du domaine en coordonnées polaires s'écrit donc (fig. 315): $\rho = \Phi_1(\theta) = 0$, $\rho = \Phi_2(\theta) = 2a\sin\theta$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. La fonction à intégrer devient

$$F(\theta, \rho) = \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

On obtient, par conséquent :

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2a\sin\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(4a^2-4a^2\sin^2\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}]\,d\theta=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{9}a^3(3\pi-4).$$

Exemple 2. Calculer l'integrale de Poisson

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

Solution. Calculons d'abord l'intégrale $I_R=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, le domaine d'intégration étant le cercle (fig. 316)

$$x^2+y^2=R^2.$$

Passons en coordonnées polaires θ, ρ :

$$I_R=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{-\rho^2}\Big|_0^R\,d\theta=\pi(1-e^{-R^2}).$$

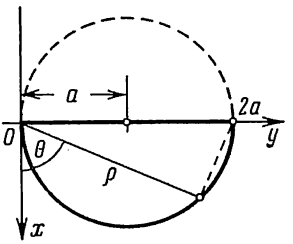


Fig. 315

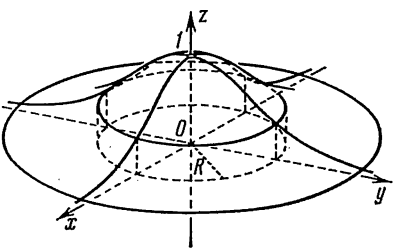


Fig. 316

Faisons tendre R vers l'infini, c.-à-d. agrandissons indéfiniment le domaine d'intégration. On a

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to\infty}\pi(1-e^{-R^2})=\pi.$$

Montrons que l'intégrale $\iint\limits_{D'}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ tend vers π lorsqu'on élargit

le domaine D' de sorte que tout point du plan se trouve en définitive dans D' (nous écrirons conventionnellement $D' \to \infty$).

Soient R_1 et R_2 la plus petite et la plus grande distance de la frontière de D' à l'origine des coordonnées (fig. 317).

Comme $e^{-x^2-y^2} > 0$ partout, on a

$$I_{R_1} \leqslant \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant I_{R_2}$$

ou

$$\pi\,(1-e^{-R_1^2}) \leqslant \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant \pi\,(1-e^{-R_2^2}).$$

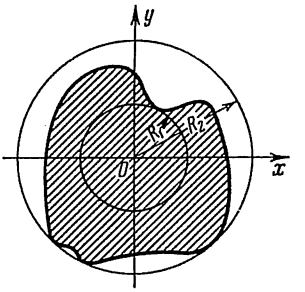


Fig. 317

Comme $D' \to \infty$, on a aussi $R_1 \to \infty$ et $R_2 \to \infty$, et les membres extrêmes de l'inégalité tendent vers une seule et même limite π. Il en est donc de même du terme intermédiaire :

$$\lim_{D'\to\infty} \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi. \tag{5}$$

Supposons notamment que D' soit un carré de côté $2a$ et de centre à l'origine ; on aura

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy.$$

Sortons maintenant le facteur e^{-y^2} de sous l'intégrale interne (ce qui est permis, car e^{-y^2} ne dépend pas de la variable d'intégration x). On a

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)dy.$$

Posons $\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx = B_a$. C'est un nombre constant (il dépend seulement de a); on a donc

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}B_a\,dy = B_a\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy.$$

Mais cette dernière intégrale est aussi égale à $B_a\left(\text{car } \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx =\right.$

$= \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy\Big)$; par conséquent,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = B_a B_a = B_a^2.$$

Passons maintenant à la limite en faisant tendre a vers l'infini dans cette égalité (D' s'élargit alors indéfiniment) :

$$\lim_{D'\to\infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{a\to\infty} B_a^2 = \lim_{a\to\infty} \left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2$$

Mais on a vu que (5)

$$\lim_{D'\to\infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi.$$

Par conséquent,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \pi,$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Cette intégrale se rencontre souvent en probabilités et en statistique. Notons qu'il nous aurait été impossible de calculer directement cette intégrale, étant donné que la primitive de e^{-x^2} ne s'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires.

§ 6. Changement de variables dans une intégrale double (cas général)

Considérons un domaine D du plan Oxy limité par une courbe L. Supposons que les coordonnées x et y soient des fonctions des nouvelles variables u et v :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

où les fonctions $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ sont univoques, continues et possèdent des dérivées continues dans un certain domaine D' que nous définirons par la suite. Il correspond alors d'après les formules (1) à tout couple de valeurs u et v un seul couple de valeurs x et y. Supposons en outre les fonctions φ et ψ telles que si l'on donne à x et y des valeurs définies du domaine D, il leur correspond alors des valeurs déterminées de u et v d'après les formules (1).

Considérons le système de coordonnées cartésiennes Ouv (fig. 318). Il résulte de ce qui précède qu'à tout point $P(x, y)$ du plan Oxy

(fig. 319) il correspond univoquement un point P' (u, v) du plan Ouv de coordonnées u, v définies par les formules (1). Les nombres u et v sont appelés les coordonnées *curvilignes* de P.

Si dans le plan Oxy le point P décrit la courbe fermée L délimitant le domaine D, le point correspondant décrit dans le plan Ouv une courbe fermée L' délimitant un certain domaine D'; il correspond alors à tout point de D' un point de D.

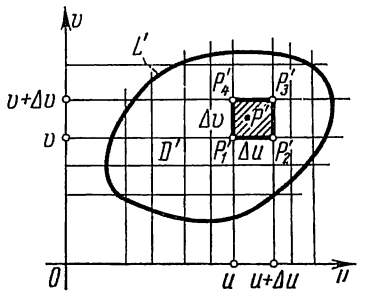


Fig. 318

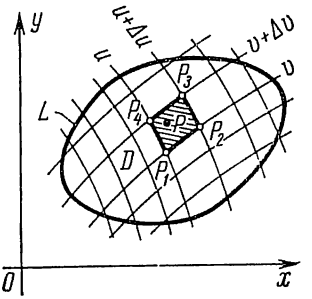


Fig. 319

Ainsi, les formules (1) établissent une correspondance biunivoque entre les points des domaines D et D' ou, comme on dit encore, représentent biunivoquement D sur D'.

Considérons dans D' une droite $u = \text{const}$. En général, les formules (1) lui font correspondre dans le plan Oxy une ligne courbe. De la même façon, il correspondra à toute droite $v = \text{const}$ du plan Ouv une certaine courbe dans le plan Oxy.

Découpons le domaine D' par des droites $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$ en de petits domaines rectangulaires (nous ne prendrons pas en considération les rectangles empiétant sur la frontière de D'). Les courbes correspondantes du domaine D découpent ce dernier en quadrilatères curvilignes (fig. 319).

Considérons dans le plan Ouv le rectangle $\Delta s'$ limité par les droites $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$ et le quadrilatère curviligne correspondant Δs dans le plan Oxy. Nous désignerons les aires de ces domaines partiels également par $\Delta s'$ et Δs. On a évidemment

$$\Delta s' = \Delta u \, \Delta v.$$

Les aires Δs et $\Delta s'$ sont en général différentes.

Supposons donnée dans D une fonction continue

$$z = f(x, y).$$

Il correspond à toute valeur de la fonction $z = f(x, y)$ du domaine D la même valeur de $z = F(u, v)$ dans D', où

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Considérons les sommes intégrales de la fonction z dans le domaine D. On a évidemment l'égalité suivante:

$$\sum f(x, y)\,\Delta s = \sum F(u, v)\,\Delta s. \tag{2}$$

Calculons Δs, c.-à-d. l'aire du quadrilatère curviligne $P_1P_2P_3P_4$ dans le plan Oxy (voir fig. 319).

Déterminons les coordonnées de ses sommets:

$$\left.\begin{array}{ll} P_1(x_1, y_1),\ x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2),\ x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), & y_2 = \psi(u + \Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3),\ x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ P_4(x_4, y_4),\ x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), & y_4 = \psi(u, v + \Delta v). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Nous assimilerons dans le calcul de l'aire du quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ les arcs P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 à des segments de droites parallèles; nous remplacerons en outre les accroissements des fonctions par leurs différentielles. C'est dire que nous faisons abstraction des infiniment petits d'ordre plus élevé que Δu et Δv. Les formules (3) deviennent alors:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ x_2 = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u, \\ x_3 = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, \\ x_4 = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v. \end{array}\right\} \tag{3'}$$

Sous ces hypothèses, le quadrilatère curviligne $P_1P_2P_3P_4$ peut être assimilé à un parallélogramme. Son aire Δs est approximativement égale au double de l'aire du triangle $P_1P_2P_3$, que l'on calcule en appliquant la formule correspondante de la géométrie analytique:

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| = \\ &= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| = \\ &= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\,\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\,\Delta v\right| = \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix} \right\| \Delta u\, \Delta v\ ^{*)}.$$

Posons

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = I.$$

Par conséquent,

$$\Delta s \approx |\, I \,|\, \Delta s'. \tag{4}$$

Le déterminant I est appelé le *déterminant fonctionnel* ou *jacobien* (du nom du mathématicien allemand Jacobi) des fonctions $\varphi\,(u,\ v)$ et $\psi\,(u,\ v)$.

L'égalité (4) n'est qu'approximative, étant donné que dans les calculs de l'aire Δs nous avons négligé les infiniment petits d'ordre supérieur. Toutefois, plus les dimensions des domaines élémentaires Δs et $\Delta s'$ sont petites, plus on s'approche de l'égalité. L'égalité a lieu quand on passe à la limite, les diamètres des domaines élémentaires Δs et $\Delta s'$ tendant vers zéro:

$$|\, I \,| = \lim_{\operatorname{diam} \Delta s' \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Appliquons maintenant l'égalité obtenue au calcul de l'intégrale double. On peut écrire en vertu de l'égalité (2)

$$\sum f\,(x,\ y)\ \Delta s \approx \sum F\,(u,\ v)\ |\, I \,|\ \Delta s'$$

(la somme intégrale de droite est étendue à D'). Passant à la limite lorsque diam $\Delta s' \to 0$, on obtient l'égalité rigoureuse

$$\iint\limits_{D} f\,(x,\ y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} F\,(u,\ v)\, |\, I \,|\, du\, dv. \tag{5}$$

Telle est la f o r m u l e d e t r a n s f o r m a t i o n d e s c o o r d o n n é e s d a n s u n e i n t é g r a l e d o u b l e. Elle permet de ramener le calcul d'une intégrale double dans le domaine D au calcul d'une intégrale double dans le domaine D', ce qui peut simplifier le problème. La première démonstration rigoureuse de cette formule est due à M. Ostrogradsky.

R e m a r q u e. Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, examiné au paragraphe précédent, est un cas

*) Le double trait vertical signifie que l'on prend la valeur absolue du déterminant.

particulier du changement de variables dans une intégrale double. On a dans ce cas $u = \theta$, $v = \rho$:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

L'arc de cercle AB ($\rho = \rho_1$) du plan Oxy (fig. 320) est représenté par la droite $A'B'$ dans le plan $O\theta\rho$ (fig. 321). L'arc de cercle DC ($\rho = \rho_2$) du plan Oxy est représenté par la droite $D'C'$ du plan $O\theta\rho$.

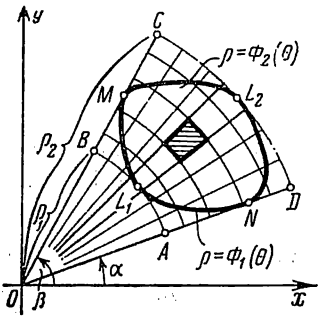


Fig. 320

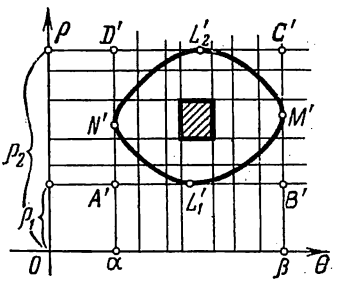


Fig. 321

Les droites AD et BC du plan Oxy sont représentées par les droites $A'D'$ et $B'C'$ du plan $O\theta\rho$. Les courbes L_1 et L_2 sont représentées par les courbes L_1' et L_2'.

Calculons le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes x et y en coordonnées polaires θ et ρ:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \theta - \rho \cos^2 \theta = -\rho.$$

On a donc $|I| = \rho$ et

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho\, d\rho \right) d\theta.$$

On retrouve la formule établie au paragraphe précédent.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_D (y - x)\, dx\, dy,$$

où D est le domaine du plan Oxy limité par les droites

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3} x + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3} x + 5.$$

Le calcul direct de cette intégrale double est assez fastidieux, mais un changement de variables simple permet de ramener cette intégrale à l'intégration dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Posons

$$u=y-x, \qquad v=y+\frac{1}{3}x. \tag{6}$$

Alors les droites $y=x+1$, $y=x-3$ sont représentées respectivement par les droites $u=1$, $u=-3$ du plan Ouv; les droites $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$ ont pour images les droites $v=\frac{7}{3}$, $v=5$.

Le domaine D sera donc représenté par le domaine rectangulaire D' de la fig. 322. Reste à calculer le jacobien de la transformation. Exprimons à cet effet x et y en fonction de u et v. On obtient en résolvant le système d'équations (6)

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v; \qquad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v.$$

Par conséquent,

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4},$$

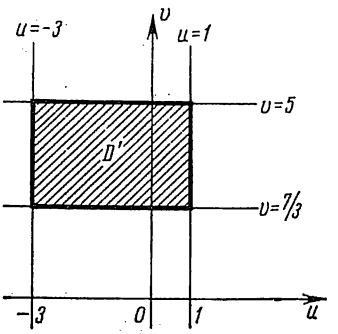


Fig. 322

et la valeur absolue du jacobien est $|I|=\frac{3}{4}$. Donc

$$\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}\left[\left(+\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D'}\frac{3}{4}u\,du\,dv=\int\limits_{\frac{7}{3}}^{5}\int\limits_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\,du\,dv=-8.$$

§ 7. Calcul des aires de surfaces

Soit à calculer l'aire limitée par une courbe Γ tracée sur une surface (fig. 323); la surface est donnée par une équation $z=f(x, y)$, où $f(x, y)$ est continue et possède des dérivées partielles continues.

Soit L la projection de Γ sur le plan Oxy. Désignons le domaine du plan Oxy limité par L par D.

Découpons arbitrairement D en n domaines élémentaires Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_n. Prenons dans chaque domaine élémentaire Δs_i un

point arbitraire P_i (ξ_i, η_i). Il correspond au point P_i un point sur la surface

$$M_i\,[\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i)].$$

Menons le plan tangent à la surface au point M_i. Il a pour équation

$$z - z_i = f'_x(\xi_i,\ \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i,\ \eta_i)(y - \eta_i) \qquad (1)$$

(voir § 6, chap. IX, t. I). Délimitons sur ce plan le domaine $\Delta\sigma_i$

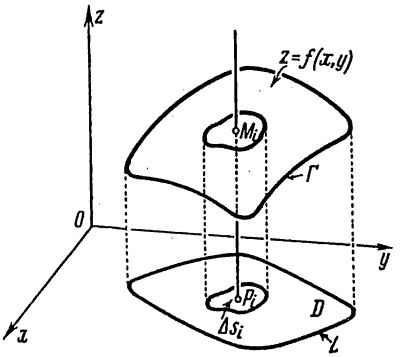


Fig. 323

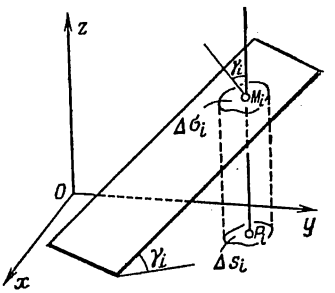


Fig. 324

ayant Δs_i pour projection sur le plan Oxy. Considérons la somme de toutes les aires correspondantes $\Delta\sigma_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

La limite σ de cette somme, lorsque le plus grand des diamètres des $\Delta\sigma_i$ tend vers zéro, sera, par définition, *l'aire de la surface* :

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

Calculons maintenant l'aire de la surface. Désignons par γ_i l'angle entre le plan tangent et le plan Oxy. On sait de la géométrie analytique que (fig. 324)

$$\Delta s_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$$

ou

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos\gamma_i}. \qquad (3)$$

L'angle γ_i est aussi l'angle entre l'axe Oz et la normale au plan (1). On obtient compte tenu de (1) et par application de la formule correspondante de la géométrie analytique :

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i,\ \eta_i) + f'^2_y(\xi_i,\ \eta_i)}}.$$

Par conséquent,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta s_i.$$

Substituons cette expression dans la formule (2), on obtient :

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam}\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta s_i.$$

Comme la limite de la somme intégrale du second membre de cette dernière égalité est, par définition, l'intégrale double

$\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$, on a en définitive

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Telle est la formule permettant de calculer l'aire de la surface $z = f(x, y)$.

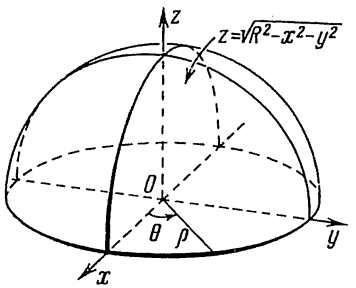


Fig. 325

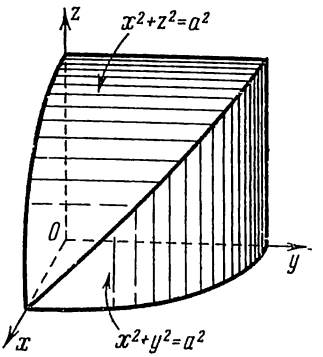


Fig. 326

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$x = \mu(y, z) \text{ ou bien } y = \chi(x, z),$$

les formules correspondantes du calcul de l'aire deviennent

$$\sigma = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz, \qquad (3')$$

$$\sigma = \iint\limits_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz, \qquad (3'')$$

où D' et D'' sont des domaines des plans Oyz et Oxz sur lesquels se projette la surface donnée.

Exemple 1. Calculer l'aire σ de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Solution. Calculons l'aire de l'hémisphère supérieur

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

(fig. 325). On a :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Le domaine d'intégration est déterminé par la condition

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2.$$

On a donc en vertu de la formule (4) :

$$\frac{1}{2}\sigma = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dy \right) dx.$$

Pour calculer cette intégrale double, passons aux coordonnées polaires. L'équation de la frontière du domaine d'intégration devient $\rho = R$. Par conséquent,

$$\sigma = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, \rho\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= 2R \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^R d\theta = 2R \int_0^{2\pi} R\, d\theta = 4\pi R^2.$$

Exemple 2. Trouver l'aire de la partie du cylindre

$$x^2 + y^2 = a^2$$

découpée par le cylindre

$$x^2 + z^2 = a^2.$$

Solution. On a représenté sur la fig. 326 le huitième de la surface en question. L'équation de la surface est

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Le domaine d'intégration est le quart de cercle d'équation

$$x^2 + z^2 \leqslant a^2, \quad x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{8}\sigma=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dz\right)dx=a\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a\int_0^a dx=a^2,\qquad \sigma=8a^2.$$

§ 8. Densité de distribution de matière et intégrale double

Supposons distribuée dans un domaine D une certaine matière, de sorte que chaque unité d'aire de ce domaine contient une certaine quantité de cette matière. Nous parlerons par la suite de la distribution de m a s s e, bien que les raisonnements qui suivent soient valables quand il s'agit de la distribution de charge électrique, de quantité de chaleur, etc.

Considérons un élément d'aire arbitraire Δs du domaine D. Soit Δm la masse de la matière distribuée sur cet élément. On appelle alors le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ densité superficielle moyenne de la matière dans le domaine Δs.

Supposons maintenant que l'aire Δs se resserre autour du point $P(x, y)$. Considérons la limite $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s}$. Si elle existe, elle dépendra, en général, de la position du point P, c.-à-d. des coordonnées x, y. C'est donc une fonction $f(P)$ du point P. Nous appellerons cette limite *densité superficielle* de la matière au point P:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s}=f(P)=f(x, y). \tag{1}$$

Ainsi, la densité superficielle est une fonction $f(x, y)$ des coordonnées du point considéré dans le domaine.

Inversement, supposons donnée dans le domaine D la densité superficielle d'une certaine matière en tant que fonction continue $f(P)=f(x, y)$; l'on demande de déterminer la quantité totale de matière M contenue dans D. Découpons le domaine D en aires partielles Δs_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ et prenons dans chaque aire un point P_i; $f(P_i)$ représente alors la densité superficielle au point P_i.

Le produit $f(P_i)\,\Delta s_i$ représente, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, la quantité de matière contenue dans l'aire Δs_i, et la somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i$$

exprime approximativement la quantité totale de matière distribuée dans le domaine D. Or, c'est une somme intégrale pour la

fonction $f(P)$ dans D. On obtient une valeur exacte en passant à la limite lorsque $\Delta s_i \to 0$.

Par conséquent *),

$$M = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(P)\,ds = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

c.-à-d. que la quantité totale de matière dans le domaine D est égale à l'intégrale double sur D de la densité $f(P) = f(x, y)$ de cette matière.

Exemple. Déterminer la masse d'une plaque circulaire de rayon R, sachant que la densité superficielle $f(x, y)$ du matériau en chaque point $P(x, y)$ est proportionnelle à la distance du point (x, y) au centre du cercle:

$$f(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

Solution. On a d'après la formule (2):

$$M = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

où le domaine d'intégration D est le cercle $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

Passons en coordonnées polaires, on obtient:

$$M = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\rho\,d\rho\right)d\theta = k2\pi\,\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\,k\pi R^3.$$

§ 9. Moment d'inertie d'une figure plane

On appelle *moment d'inertie I d'un point matériel M* de masse m par rapport à un point O le produit de cette masse m par le carré de la distance r du point M au point O:

$$I = mr^2.$$

Le *moment d'inertie d'un système de points matériels $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$* par rapport à O est la somme des moments d'inertie des divers points du système:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Déterminons à présent le moment d'inertie d'une figure matérielle plane D.

Supposons D contenue dans le plan Oxy. Déterminons le moment d'inertie de cette figure par rapport à l'origine O en supposant la densité superficielle constante et égale à l'unité.

---

*) L'expression $\Delta s_i \to 0$ signifie ici que le diamètre de l'élément d'aire Δs_i tend vers zéro.

Découpons D en aires élémentaires ΔS_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) (fig. 327). Prenons dans chaque élément d'aire un point P_i de coordonnées ξ_i, η_i. Appelons moment d'inertie élémentaire ΔI_i de l'aire ΔS_i le produit de la masse de ΔS_i par le carré de la distance $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$:

$$\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i$$

et formons la somme de tels moments:

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

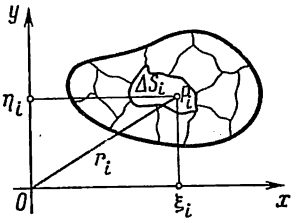


Fig. 327

Elle définit une somme intégrale pour la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le domaine D.

Définissons le *moment d'inertie de la figure* comme la limite de cette somme intégrale lorsque le diamètre de chaque élément ΔS_i tend vers zéro:

$$I_0 = \lim_{\operatorname{diam} \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

Mais la limite de cette somme est l'intégrale double $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$. Par conséquent, le moment d'inertie de la figure D par rapport à l'origine des coordonnées est

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{1}$$

D étant le domaine défini par la figure plane donnée.

Les intégrales

$$I_{xx} = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

$$I_{yy} = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy \tag{3}$$

sont appelées respectivement les *moments d'inertie de la figure D par rapport aux axes Ox* et *Oy*.

Exemple 1. Calculer le moment d'inertie du cercle plein D de rayon R par rapport à son centre O.

Solution. On a, d'après la formule (1):

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Passons en coordonnées polaires θ, ρ. L'équation de ce cercle devient

$$\rho = R.$$

Donc

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho^2 \rho \, d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Remarque. Si la densité superficielle γ n'est pas égale à l'unité mais est une fonction de x et y, c.-à-d. $\gamma = \gamma(x, y)$, la masse de l'aire ΔS_i sera égale, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, à $\gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$ et le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'origine devient:

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y)\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy. \qquad (1')$$

Exemple 2. Calculer le moment d'inertie de la figure matérielle plane D limitée par les courbes $y^2 = 1 - x$; $x = 0$, $y = 0$ par rapport à l'axe Oy, sachant que la densité superficielle en chaque point est égale à y (fig. 328).

Solution.

$$I_{yy} = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{24}.$$

Ellipse d'inertie. Déterminons le moment d'inertie d'une figure plane D par rapport à un certain axe OL passant par

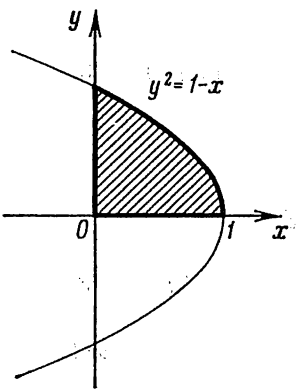


Fig. 328

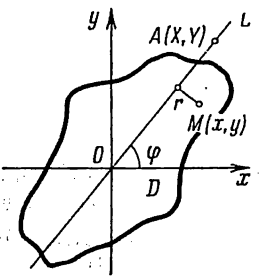


Fig. 329

un point O que nous prendrons pour origine des coordonnées. Soit φ l'angle formé par la droite OL avec la direction positive de l'axe Ox (fig. 329).

L'équation normale de la droite OL est

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

La distance r d'un point quelconque $M(x, y)$ à cette droite est égale à

$$r = | x \sin \varphi - y \cos \varphi |.$$

Le moment d'inertie I de la figure plane D par rapport à la droite OL est par définition

$$I = \iint_D r^2 \, dx \, dy = \iint_D (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 \, dx \, dy =$$

$$= \sin^2 \varphi \iint_D x^2 \, dx \, dy - 2 \sin \varphi \cos \varphi \iint_D xy \, dx \, dy + \cos^2 \varphi \iint_D y^2 \, dx \, dy.$$

Par conséquent,

$$I = I_{yy} \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + I_{xx} \cos^2 \varphi, \qquad (4)$$

où $I_{yy} = \iint_D x^2 \, dx \, dy$ est le moment d'inertie de la figure par rapport à l'axe y et $I_{xx} = \iint_D y^2 \, dx \, dy$ le moment d'inertie par rapport à l'axe x; nous avons posé en outre $I_{xy} = \iint_D xy \, dx \, dy$. Divisons tous les termes de l'égalité (4) par I; on obtient :

$$1 = I_{xx} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}}\right) + I_{yy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}}\right)^2. \qquad (5)$$

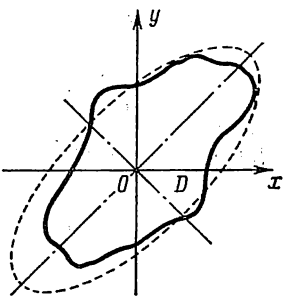


Fig. 330

Prenons sur l'axe OL un point $A(X, Y)$ tel que

$$OA = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Il correspond à diverses directions OL, c.-à-d. à divers angles φ, diverses valeurs I et donc divers points A. Cherchons le lieu géométrique des points A. On a évidemment

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \varphi, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \sin \varphi.$$

En vertu de l'égalité (5), les quantités X et Y sont reliées entre elles par la relation

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2. \tag{6}$$

Le lieu géométrique des points A (X, Y) est donc la courbe du second degré (6). Montrons que c'est une ellipse.

On a l'inégalité suivante dite de Bouniakovsky *) (mathématicien russe):

$$\left(\iint\limits_D xy\,dx\,dy\right)^2 < \left(\iint\limits_D x^2\,dx\,dy\right)\left(\iint\limits_D y^2\,dx\,dy\right)$$

ou

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Ainsi, le discriminant de la courbe (6) est positif, ce qui montre que c'est une ellipse (fig. 330). On l'appelle *ellipse d'inertie*. La notion d'ellipse d'inertie est fondamentale en mécanique.

---

*) Pour démontrer l'inégalité de Bouniakovsky, considérons l'inégalit évidente:

$$\iint\limits_D [f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)]^2\,dx\,dy \geqslant 0,$$

où λ est une constante. L'égalité n'est possible que lorsque $f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) \equiv \equiv 0$, c.-à-d. si $f(x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Si l'on suppose que $\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x, y)} \neq \text{const} = \lambda$, on aura toujours une inégalité. On obtient donc en développant les parenthèses sous le signe d'intégration:

$$\iint\limits_D f^2(x, y)\,dx\,dy - 2\lambda\iint\limits_D f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy + \lambda^2\iint\limits_D \varphi^2(x, y)\,dx\,dy > 0.$$

Considérons l'expression du premier membre comme une fonction de λ. C'est un polynôme du second degré ne s'annulant pas; ses racines sont donc complexes, ce qui implique que le discriminant formé avec les coefficients du polynôme du second degré est négatif, c.-à-d. que

$$\left(\iint\limits_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2 - \iint\limits_D f^2\,dxdy \iint\limits_D \varphi^2\,dx\,dy < 0$$

ou

$$\left(\iint\limits_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2 < \iint\limits_D f^2\,dx\,dy \iint\limits_D \varphi^2\,dx\,dy$$

C'est l'*inégalité de Bouniakovsky*.

Dans notre cas, $f(x, y) = x$, $\varphi(x, y) = y$, $\dfrac{x}{y} \neq \text{const}$.

La remarquable inégalité de Bouniakovsky intervient constamment en mathématiques. Dans maints ouvrages elle est appelée inégalité de Schwarz. Bouniakovsky l'a publiée (ainsi que d'autres inégalités importantes) en 1859 et Schwarz en 1875.

Notons que les longueurs des axes de l'ellipse d'inertie et sa disposition dans le plan dépendent de la forme de la figure plane donnée. Comme la distance de l'origine des coordonnées à un point arbitraire A de l'ellipse est égale à $\frac{1}{\sqrt{I}}$, où I est le moment d'inertie de la figure relativement à l'axe OA, ayant construit l'ellipse, on calcule facilement le moment d'inertie de la figure D par rapport à une droite quelconque passant par l'origine des coordonnées. En particulier, il est facile de voir que le moment d'inertie de la figure est minimum par rapport au grand axe de l'ellipse et maximum par rapport à son petit axe.

§ 10. Coordonnées du centre de gravité d'une figure plane

Nous avons indiqué au § 8 du chapitre XII (t. I) que les coordonnées du centre de gravité d'un système de points matériels $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ étaient données par les formules

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \qquad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}. \tag{1}$$

Déterminons à présent les coordonnées du centre de gravité d'une figure plane D. Découpons cette figure en aires élémentaires très petites ΔS_i. Si l'on suppose que la densité superficielle est égale à l'unité, la masse de l'élément partiel sera égale à son aire. Si l'on suppose en outre, en première approximation, que toute la masse de l'aire élémentaire ΔS_i est concentrée en l'un quelconque de ses points P_i (ξ_i, η_i), on pourra assimiler la figure D à un système de points matériels. En vertu des formules (1), les coordonnées du centre de gravité de la figure seront alors déterminées approximativement par les égalités:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \xi_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \eta_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}.$$

A la limite, lorsque $\Delta S_i \to 0$, les sommes intégrales des numérateurs et des dénominateurs définissent des intégrales doubles et nous obtenons des formules exactes pour le calcul des coordonnées du centre de gravité d'une figure plane:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \tag{2}$$

Ces formules, qui ont été établies pour une figure plane de densité superficielle égale à 1, subsistent pour une figure dont la densité serait une constante γ.

Si la densité superficielle est variable :

$$\gamma = \gamma(x, y),$$

les formules correspondantes prennent alors la forme

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, x\, dx\, dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dx\, dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dx\, dy}.$$

Les expressions

$$M_y = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, x\, dx\, dy$$

et

$$M_x = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy$$

sont appelées *moments statiques* de la figure plane D par rapport aux axes Oy et Ox.

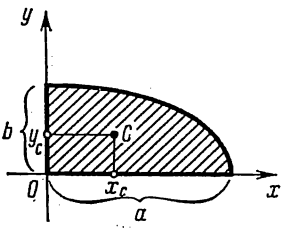


Fig. 331

L'intégrale $\iint \gamma(x, y)\, dx\, dy$ exprime la m a s s e de la figure considérée.

E x e m p l e. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du quart d'ellipse (fig. 331)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en supposant la densité superficielle partout égale à 1.

S o l u t i o n. D'après les formules (2) :

$$x_c = \frac{\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy \right) dx}{\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx} = \frac{\frac{b}{a} \int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx}{\frac{1}{4}\pi ab} =$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\right) dx}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

§ 11. Intégrales triples

Considérons un domaine V de l'espace limité par une surface S. Soit une fonction $f(x, y, z)$, où x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, définie et continue dans V et sur sa frontière. Pour fixer les idées, lorsque $f(x, y, z) \geqslant 0$, on pourra supposer que cette fonction représente la densité de distribution d'une certaine matière dans V.

Découpons le domaine V arbitrairement en domaines partiels Δv_i, où Δv_i représentera également le volume du petit domaine correspondant. Prenons un point arbitraire P_i dans chaque Δv_i et désignons par $f(P_i)$ la valeur de la fonction f en ce point. Formons la somme intégrale

$$\sum f(P_i)\,\Delta v_i \tag{1}$$

et augmentons le nombre de domaines partiels Δv_i de sorte que leurs diamètres tendent vers zéro *). Si la fonction $f(x, y, z)$ est continue, la limite des sommes intégrales (1) existe (on donne ici à la limite le même sens que pour les intégrales doubles **)). Cette limite, qui ne dépend ni du mode de découpage du domaine V ni du choix des points P_i, est désignée par le symbole $\iiint\limits_V f(P)\,dv$ et on l'appelle *intégrale triple*. On a donc, par définition,

$$\lim_{\operatorname{diam}\Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta v_i = \iiint\limits_V f(P)\,dv$$

ou

$$\iiint\limits_V f(P)\,dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

---

*) On appelle diamètre du domaine Δv_i la plus grande distance entre les points de sa frontière.

**) Nous ne démontrerons pas ce théorème d'existence de la limite des sommes intégrales (théorème d'existence des intégrales triples), qui a lieu pour toute fonction continue dans un domaine fermé V (y compris la frontière).

Si l'on considère que $f(x, y, z)$ est la densité spatiale de la distribution d'une matière dans un domaine V, l'intégrale (2) donne la masse de toute la matière se trouvant dans V.

§ 12. Calcul des intégrales triples

Supposons qu'un domaine spatial (tridimensionnel) V limité par une surface fermée S jouisse des propriétés suivantes:

1) toute parallèle à l'axe Oz passant par un point intérieur (c.-à-d. non tangente à la frontière S) de V coupe la surface S en deux points;

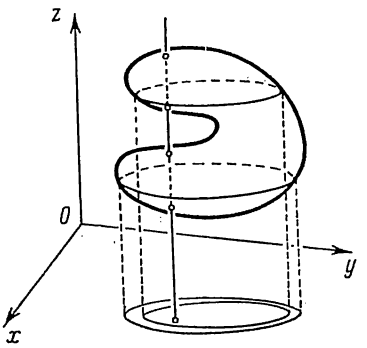


Fig. 332

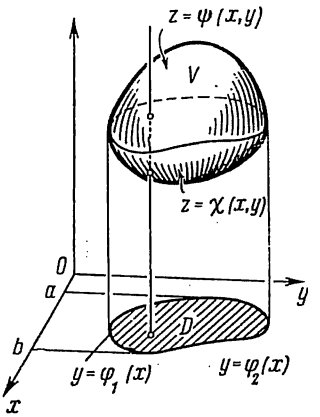


Fig. 333

2) le domaine tout entier V a pour projection sur le plan Oxy un domaine régulier D (à deux dimensions);

3) toute partie de V obtenue en découpant V par un plan parallèle à un plan de coordonnées quelconque (Oxy, Oxz, Oyz) jouit également des propriétés 1) et 2).

Un domaine V à trois dimensions jouissant des propriétés indiquées sera dit *régulier*.

Tels sont, par exemple, l'ellipsoïde, le parallélépipède droit, le tétraèdre, etc. On donne un exemple de domaine irrégulier à trois dimensions sur la figure 332. Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que des domaines réguliers.

Supposons que la surface délimitant le domaine V ait pour équation dans sa partie inférieure $z = \chi(x, y)$ et dans sa partie supérieure $z = \psi(x, y)$ (fig. 333).

Donnons un procédé de calcul d'une intégrale t r i p l e I_V dans un domaine V pour une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ définie et continue dans V. Supposons que la projection D de V sur le plan Oxy soit limitée par les courbes

$$y = \varphi_1(x), \; y = \varphi_2(x), \; x = a, \; x = b.$$

On a alors

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx. \qquad (1)$$

Observons qu'après intégration par rapport à z et substitution des bornes dans les accolades de (1) on obtient une fonction de x et y. Il reste alors une intégrale double sur D que l'on sait intégrer.

Donnons un exemple de calcul d'une intégrale triple.

Exemple 1. Calculer l'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z) = xyz$ dans le volume V limité par les plans

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Solution. Ce domaine est régulier, il est limité supérieurement et inférieurement par les plans $z = 0$ et $z = 1 - x - y$, et sa projection sur le plan Oxy est un domaine régulier D qui est le triangle limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (fig. 334). Par conséquent:

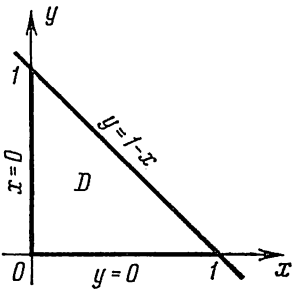


Fig. 334

$$I_V = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz\, dz \right] d\sigma.$$

Introduisons les bornes d'intégration dans l'intégrale double sur le domaine D:

$$I_V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz\, dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} xy\,(1-x-y)^2\, dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24}\,(1-x)^4\, dx = \frac{1}{720}.$$

Considérons à présent quelques propriétés des intégrales triples.

Propriété 1. *Si l'on coupe le domaine V en deux domaines V_1 et V_2 par un plan parallèle à un plan de coordonnées quelconque, l'intégrale triple dans V est la somme des intégrales triples dans V_1 et V_2.*

La démonstration de cette propriété est analogue en tous points à celle de la propriété correspondante des intégrales doubles. Il n'y a donc pas lieu de la reprendre.

Corollaire. *Quel que soit le découpage du domaine V en un nombre fini de domaines $V_1, \ldots, V_n$ par des plans parallèles aux plans de coordonnées, on a*

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \ldots + I_{V_n}.$$

Propriété 2 (Théorème sur l'évaluation d'une intégrale triple). *m et M étant la plus petite et la plus grande valeur de $f(x, y, z)$ dans V, on a l'inégalité*

$$mV \leqslant I_V \leqslant MV,$$

où V est le volume du domaine donné et I_V l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ dans V.

Démonstration. Evaluons d'abord l'intégrale interne dans l'intégrale triple $I_V = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] d\sigma$:

$$\int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \leqslant \int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} M\, dz = M \int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz =$$

$$= Mz \Big|_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} = M[\psi(x, y) - \chi(x, y)].$$

L'intégrale interne n'est donc pas supérieure à l'expression $M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]$. Par conséquent, en vertu du théorème du § 1 sur les intégrales doubles, on obtient (en désignant par D la projection de V sur le plan Oxy) :

$$I_V = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] d\sigma \leqslant \iint\limits_D M[\psi(x, y) -$$

$$- \chi(x, y)]\, d\sigma = M \iint\limits_D [\psi(x, y) - \chi(x, y)]\, d\sigma.$$

Mais cette dernière intégrale double est égale au volume du domaine compris entre les surfaces $z = \chi(x, y)$ et $z = \psi(x, y)$, c.-à-d. au volume du domaine V. On a donc

$$I_V \leqslant MV.$$

On démontre d'une manière analogue que $I_V \geqslant mV$. La propriété 2 est ainsi démontrée.

Propriété 3 (Théorème de la moyenne). *L'intégrale triple I_V d'une fonction continue $f(x, y, z)$ dans un domaine V est égale au produit de son volume V par la valeur de la*

fonction en un certain point P du domaine:

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx = f(P)\, V. \qquad (2)$$

La démonstration de cette propriété est analogue à celle de la propriété correspondante des intégrales doubles (voir § 2, propriété 3, formule (4)). Nous pouvons maintenant démontrer le théorème sur le calcul des intégrales triples.

Théorème. *L'intégrale triple d'une fonction $f(x, y, z)$ dans un domaine régulier V a pour expression*

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

Démonstration. Découpons le domaine V par des plans parallèles aux plans de coordonnées en n domaines réguliers:

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \ldots,\ \Delta v_n.$$

Désignons, comme plus haut, par I_V l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ dans V et par $I_{\Delta v_i}$ l'intégrale triple de cette fonction dans l'élément de volume Δv_i. On peut écrire en vertu de la propriété 1 (de son corollaire):

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + \ldots + I_{\Delta v_n}. \qquad (3)$$

Transformons chaque terme du second membre d'après la formule (2):

$$I_V = f(P_1)\, \Delta v_1 + f(P_2)\, \Delta v_2 + \ldots + f(P_n)\, \Delta v_n, \qquad (4)$$

où P_i est un point de Δv_i.

On a dans le second membre de cette égalité une somme intégrale. $f(x, y, z)$ est, par hypothèse, une fonction continue dans le domaine V et la limite de cette somme, lorsque le plus grand diamètre des Δv_i tend vers zéro, existe et définit l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ dans V. On obtient donc en passant à la limite dans l'égalité (4) lorsque diam $\Delta v_i \to 0$:

$$I_V = \iiint_V f(x, y, z)\, dv,$$

soit encore

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

Le théorème est démontré.

Ici $z = \chi(x, y)$ et $z = \psi(x, y)$ sont les équations des surfaces délimitant le domaine régulier V inférieurement et supérieurement.

Les courbes $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ délimitent le domaine D, projection de V sur le plan Oxy.

Remarque. Ainsi que pour les intégrales doubles, on peut former des intégrales triples avec des ordres différents d'intégration par rapport aux variables et avec d'autres bornes, si toutefois la forme du domaine V le permet.

Calcul du volume d'un corps au moyen d'une intégrale triple. Si la fonction à intégrer est $f(x, y, z) = 1$, l'intégrale triple dans le domaie V exprime le volume V de ce domaine:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

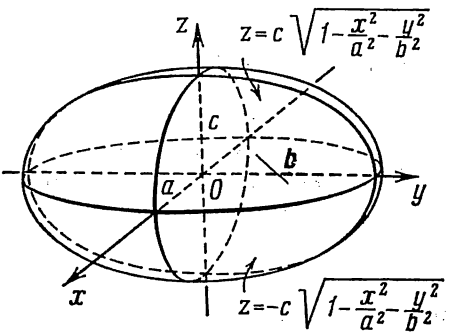


Fig. 335

Exemple 2. Calculer le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Solution. L'ellipsoïde (fig. 335) est limité inférieurement par la surface $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ et supérieurement par la surface $z=$ $=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. La projection de cet ellipsoïde sur le plan Oxy (domaine D) est l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. On a donc en ramenant au calcul d'une intégrale triple:

$$V=\int\limits_{-a}^{a}\left[\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right)dy\right]dx=$$

$$=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right]dx.$$

Lorsqu'on calcule l'intégrale interne, on considère x constant. Faisons le changement de variables :

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin t,\quad dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt.$$

La variable y va de $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ à $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, donc t varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Portant ces nouvelles bornes dans l'intégrale, on obtient :

$$V=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\;b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt\right]dx=$$

$$=2cb\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\right]dx=$$

$$=\frac{cb\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi abc}{3}.$$

Ainsi,

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Si $a=b=c$, on retrouve le volume de la sphère :

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 13. Changement de variables dans une intégrale triple

1. Intégrale triple en coordonnées cylindriques. On appelle coordonnées cylindriques les trois nombres θ, ρ, z définissant la position d'un point P dans l'espace, θ et ρ étant les coordonnées polaires de la projection du point P sur le plan Oxy et z la cote de P, c.-à-d. sa distance au plan Oxy prise avec le signe plus si le point se trouve au-dessus du plan Oxy et avec le signe moins dans le cas contraire (fig. 336).

On découpe le domaine spatial donné V en volumes élémentaires par les surfaces de coordonnées $\theta=\theta_i$, $\rho=\rho_j$, $z=z_k$ (demi-plans

contenant l'axe Oz, cylindres circulaires d'axe Oz, plans perpendiculaires à Oz). Un volume élémentaire est alors un « prisme » curviligne (représenté sur la figure 337). L'aire de la base de ce prisme est égale, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, à $\rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho$, sa hauteur est Δz (nous omettons les indices i, j, k pour abréger l'écriture). On a donc $\Delta v = \rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho\,\Delta z$. L'intégrale triple de la fonction $F(\theta, \rho, z)$ dans le domaine V s'écrit donc

$$I = \iiint\limits_V F(\theta, \rho, z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz. \qquad (1)$$

Les bornes d'intégration sont déterminées par la forme du domaine V.

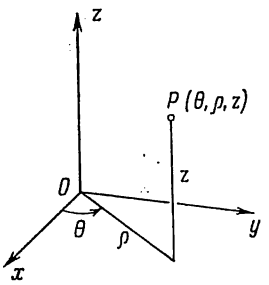


Fig. 336

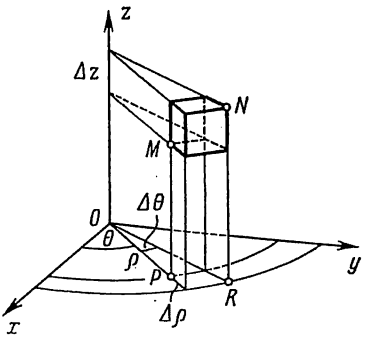


Fig. 337

Si l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ est donnée en coordonnées rectangulaires, il est facile de donner son expression en coordonnées cylindriques. En effet, prenant en considération que

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta; \quad z = z,$$

on obtient:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V F(\theta, \rho, z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz,$$

où

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) = F(\theta, \rho, z).$$

E x e m p l e. Déterminer la masse M d'un hémisphère de rayon R et de centre à l'origine des coordonnées, sachant que sa densité F est proportionnelle en chaque point (x, y, z) à la distance de ce point à la base: $F = kz$.

S o l u t i o n. L'équation de l'hémisphère supérieur

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

s'écrit en coordonnées cylindriques

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Par conséquent,

$$M=\iiint\limits_V kz\rho\,d\theta\,d\rho\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} kz\,dz\right)\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R \frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\right]d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R \frac{k}{2}(R^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]d\theta=\frac{k}{2}\,\frac{R^4}{4}\,2\pi=\frac{k\pi R^4}{4}.$$

2. Intégrale triple en coordonnées sphériques. En coordonnées sphériques, la position d'un point P dans l'espace est définie par trois nombres θ, r, φ, où r est la dis-

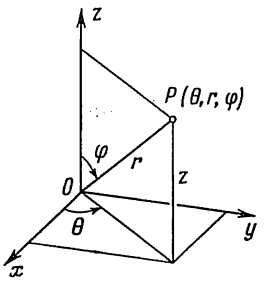


Fig. 338

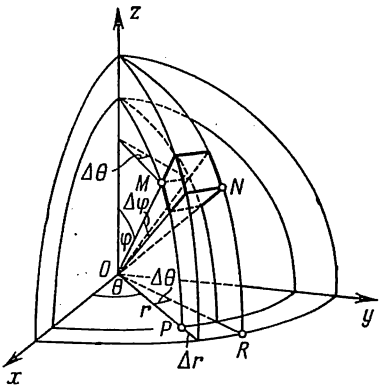


Fig. 339

tance du point à l'origine des coordonnées, dite encore le rayon vecteur du point, φ l'angle entre le rayon vecteur et l'axe Oz et θ l'angle entre la projection du rayon vecteur sur le plan Oxy et l'axe Ox calculé dans le sens trigonométrique (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) (fig. 338). On a pour tout point de l'espace :

$$0\leqslant r<\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

Découpons le domaine donné V en éléments Δv par les surfaces de coordonnées $r=\text{const}$ (sphère), $\varphi=\text{const}$ (cônes de sommets à l'origine), $\theta=\text{const}$ (demi-plans passant par l'axe Oz). A des infiniment petits d'ordre supérieur près, on peut considérer que le domaine élémentaire Δv est un parallélépipède d'arêtes Δr, $r\,\Delta\varphi$, $r\sin\varphi\,\Delta\theta$. Le volume élémentaire s'exprime alors (voir fig. 339) :

$$\Delta v=r^2\sin\varphi\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi.$$

L'intégrale triple de la fonction $F(\theta, r, \varphi)$ dans le domaine V s'écrit

$$I = \iiint\limits_V F(\theta, r, \varphi)\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi. \qquad (1')$$

Les bornes d'intégration sont déterminées par la forme du domaine V. On déduit facilement de la fig. 338 les expressions des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques :

$$x = r \sin\varphi \cos\theta,$$
$$y = r \sin\varphi \sin\theta,$$
$$z = r \cos\varphi.$$

La formule permettant de passer d'une intégrale en coordonnées cartésiennes à une intégrale en coordonnées sphériques est donc

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint\limits_V f(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

3. Changement de variables général dans une intégrale triple. Le passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques ou sphériques dans une intégrale triple est un cas particulier de la transformation générale des coordonnées dans l'espace.

Supposons que les fonctions

$$x = \varphi(u, t, w),$$
$$y = \psi(u, t, w),$$
$$z = \chi(u, t, w)$$

représentent biunivoquement le domaine V en coordonnées cartésiennes x, y, z dans un domaine V' en coordonnées curvilignes u, t, w. Supposons que l'élément de volume Δv du domaine V soit représenté par l'élément $\Delta v'$ du domaine correspondant V' et soit

$$\lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |I|.$$

Alors

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint\limits_{V'} f[\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \chi(u, t, w)]\, |I|\, du\, dt\, dw.$$

De même que pour les intégrales doubles, ici encore I est appelé le *jacobien* de la transformation ; de même que pour les intégrales

doubles, on montre que le jacobien est représenté par le déterminant du troisième ordre :

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, dans le cas des coordonnées cylindriques :

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z\ \ (\rho = u,\ \theta = t,\ z = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

En coordonnées sphériques :

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi\ (r = u,\ \varphi = t,\ \theta = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

§ 14. Moment d'inertie et coordonnées du centre de gravité d'un corps

1. Moment d'inertie d'un corps. Les moments d'inertie d'un point matériel $M(x, y, z)$ de masse m par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz (fig. 340) s'expriment respectivement par les formules

$$I_{xx} = (y^2 + z^2)\,m,$$
$$I_{yy} = (x^2 + z^2)\,m,\ I_{zz} = (x^2 + y^2)\,m.$$

Les moments d'inertie d'un corps s'expriment par les intégrales correspondantes. Ainsi, le moment d'inertie d'un corps par rapport à l'axe Oz s'exprime par l'intégrale $I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \times \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, où $\gamma(x, y, z)$ est la densité de la matière.

Exemple 1. Calculer le moment d'inertie d'un cylindre circulaire droit de hauteur $2h$ et de rayon R par rapport à un diamètre de sa section moyenne, la densité γ_0 étant constante.

Solution. Choisissons un système de coordonnées comme suit : confondons l'axe Oz avec l'axe du cylindre et prenons l'origine au centre de symétrie (fig. 341).

Le problème revient alors à chercher le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Ox:

$$I_{xx}=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\gamma_0\,dx\,dy\,dz.$$

Passons en coordonnées cylindriques:

$$I_{xx}=\gamma_0\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^R\left[\int\limits_{-h}^{h}(z^2+\rho^2\sin^2\theta)\,dz\right]\rho\,d\rho\right\}d\theta=$$

$$=\gamma_0\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^R\left[\frac{2h^3}{3}+2h\rho^2\sin^2\theta\right]\rho\,d\rho\right\}d\theta=$$

$$=\gamma_0\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{2h^3}{3}\,\frac{R^2}{2}+\frac{2hR^4}{4}\sin^2\theta\right\}d\theta=$$

$$=\gamma_0\left[\frac{2h^3R^2}{6}\,2\pi+\frac{2hR^4}{4}\,\pi\right]=\gamma_0\pi hR^2\left[\frac{2}{3}\,h^2+\frac{R^2}{2}\right].$$

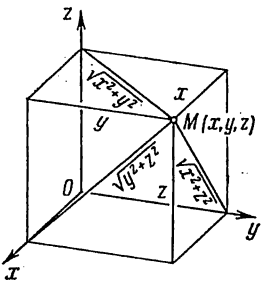


Fig. 340

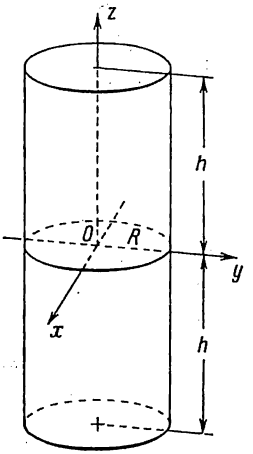


Fig. 341

2. Coordonnées du centre de gravité d'un corps. On a les formules analogues à celles du centre de gravité de figures planes données au § 8, chap. XII, t. I:

$$x_c=\frac{\iiint\limits_V x\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz},$$

où $\gamma(x, y, z)$ est la densité.

Exemple 2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la moitié supérieure d'une sphère de rayon R et de centre à l'origine. On considère que la densité γ_0 est constante.

Solution. L'hémisphère est limité par les surfaces

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = 0.$$

La cote du centre de gravité est donnée par la formule

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma_0\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma_0\,dx\,dy\,dz}.$$

Passons en coordonnées sphériques, on a:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^{R} r\cos\varphi r^2 \sin\varphi\,dr \right] d\varphi \right\} d\theta}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^{R} r^2 \sin\varphi\,dr \right] d\varphi \right\} d\theta} =$$

$$= \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

On a, évidemment, en vertu de la symétrie de l'hémisphère, $x_c = y_c = 0$.

§ 15. Intégrales dépendant d'un paramètre

Considérons l'intégrale suivante dépendant du paramètre α:

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)\,dx.$$

(Nous avons considéré de telles intégrales au § 10, chap. XI, t. I.) Indiquons sans démonstration que si la fonction $f(x, \alpha)$ est con-

tinue par rapport à x sur le segment $[a, b]$ et par rapport à α sur le segment $[\alpha_1, \alpha_2]$, la fonction

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

est continue sur le segment $[\alpha_1, \alpha_2]$. On pourra donc intégrer la fonction $I(\alpha)$ par rapport à α sur le segment $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right) d\alpha.$$

L'expression du second membre est l'intégrale double de $f(x, \alpha)$ sur le rectangle correspondant du plan $Ox\alpha$. On peut intervertir l'ordre d'intégration :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\, d\alpha \right) dx,$$

ce qui montre qu'il suffit d'intégrer par rapport au paramètre α sous le signe somme. Cette formule sert aussi au calcul de certaines intégrales définies.

Exemple. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

On ne sait pas calculer cette intégrale au moyen des fonctions élémentaires. Mais partons de l'intégrale suivante, facile à calculer :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

On obtient en intégrant cette égalité de $\alpha = a$ à $\alpha = b$:

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx \right) d\alpha = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \operatorname{Log} \frac{b}{a}.$$

Changeons l'ordre d'intégration dans le premier membre, on a :

$$\int_0^\infty \left[\int_a^b e^{-\alpha x}\, d\alpha \right] dx = \operatorname{Log} \frac{b}{a};$$

on obtient en calculant l'intégrale entre crochets :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \operatorname{Log} \frac{b}{a}.$$

Exercices

Calculer les intégrales *) :

1. $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy.$ Rép. $\frac{8}{3}$.

2. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$. Rép. $\operatorname{Log}\frac{25}{24}$.

3. $\int_1^2 \int_x^{\sqrt{3}} xy\,dx\,dy.$ Rép. $\frac{15}{4}$.

4. $\int_0^{2\pi} \int_{a\sin\theta}^{a} r\,dr\,d\theta.$ Rép. $\frac{1}{2}\pi a^2.$

5. $\int_0^a \int_{\frac{x}{a}}^{x} \frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$. Rép. $\frac{\pi a}{4} - a \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}$

6. $\int_0^a \int_{y-a}^{2y} xy\,dx\,dy.$ Rép. $\frac{11a^4}{24}$.

7. $\int_{\frac{b}{2}}^{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\,d\theta\,d\rho.$ Rép. $\frac{3}{16}\pi b^2.$

Définir les bornes d'intégration pour l'intégrale $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, le domaine d'intégration étant délimité par les courbes :

8. $x=2,\ x=3,\ y=-1,\ y=5.$ Rép. $\int_2^3 \int_{-1}^{5} f(x, y)\,dy\,dx.$

---

*) Comme nous l'avons indiqué plus haut, l'ordre a'intégration dan $\int_M^N \int_K^L f(x, y)\,dx\,dy$ est celui des différentielles, c.-à-d. que

$$\int_M^N \int_K^L f(x, y)\,dx\,dy = \int_M^N \left(\int_K^L f(x, y)\,dx\right) dy.$$

9. $y=0,\ y=1-x^2.$ Rép. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} f(x,\ y)\,dy\,dx.$

10. $x^2+y^2=a^2.$ Rép. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$

11. $y=\dfrac{2}{1+x^2},\ y=x^2.$ Rép. $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx.$

12. $y=0,\ y=a,\ y=x,\ y=x-2a.$ Rép. $\int_{0}^{a}\int_{y}^{y+2a} f(x,\ y)\,dx\,dy.$

Intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :

13. $\int_{1}^{2}\int_{3}^{4} f(x,\ y)\,dy\,dx.$ Rép. $\int_{3}^{4}\int_{1}^{2} f(x,\ y)\,dx\,dy.$

14. $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy\,dx.$ Rép. $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,\ y)\,dx\,dy.$

15. $\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy.$ Rép. $\int_{0}^{a}\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,\ y)\,dy\,dx.$

16. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx.$ Rép. $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy.$

17. $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dx\,dy.$ Rép. $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx+$

$$+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,\ y)\,dy\,dx.$$

Calculer les intégrales suivantes en passant en coordonnées polaires :

18. $\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx.$ Rép. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta=\dfrac{\pi}{6}\,a^3.$

19. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$ Rép. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^3\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$.

20. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx.$ Rép. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}$.

21. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx.$ Rép. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$.

Transformer les intégrales doubles suivantes en introduisant les nouvelles variables u et v liées à x et y par les formules $x = u - uv$, $y = uv$:

22. $\int_0^e \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy\,dx.$ Rép. $\int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int_0^{\frac{e}{1-v}} f(u-uv,\ uv)\,u\,du\,dv.$

23. $\int_0^c \int_0^b f(x, y)\,dy\,dx.$ Rép $\int_0^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv,\ uv)\,u\,du\,dv +$

$$+ \int_{\frac{b}{b+c}}^{b} \int_0^{\frac{b}{v}} f(u-uv,\ uv)\,u\,du\,dv.$$

Application de l'intégrale double au calcul des aires

24. Calculer l'aire de la figure délimitée par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$. Rép. $\frac{2}{3}$.

25. Calculer l'aire de la figure délimitée par les courbes $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$, $y = 0$. Rép. $\frac{10}{3}a^2$.

26. Calculer l'aire de la figure délimitée par les courbes $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$, $x+y=a$. Rép. $\frac{a^2}{3}$.

27. Calculer l'aire de la figure délimitée par les courbes $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$. Rép. $\sqrt{2} - 1$.

28. Calculer l'aire de la boucle de la courbe $\rho = a \sin 2\theta$. Rép. $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. Calculer l'aire délimitée par la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Rép. a^2.

30. Calculer l'aire de la boucle de la courbe $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$.

Indication. Passer aux nouvelles coordonnées $x=\rho a\cos\theta$ et $y=\rho b\sin\theta$. Rép. $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

Calcul des volumes

Calculer les volumes des corps délimités:

31. Par les surfaces $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. Rép. $\frac{abc}{6}$.
32. $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$. Rép. 3π.
33. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $xy=z$, $z=0$. Rép. π.
34. $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$. Rép. $\frac{32}{9}a^3$.
35. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$. Rép. $\frac{569}{140}$.
36. Par les plans de coordonnées, le plan $2x+3y-12=0$ et le cylindre $z=\frac{1}{2}y^2$. Rép. 16.
37. Par le cylindre circulaire droit de rayon a dont l'axe est confondu avec Oz, les plans de coordonnées et le plan $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$. Rép. $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$.
38. Par les cylindres $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$. Rép. $\frac{16}{3}a^3$.
39. $y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$. Rép. $\frac{\pi}{64}$.
40. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^2$, $a>R$. Rép. $\frac{4}{3}\pi\left[a^3-(\sqrt{a^2-R^2})^3\right]$.
41. $az=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2ax$. Rép. $\frac{3}{2}\pi a^3$.
42. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$. (Calculer le volume intérieur au cylindre.) Rép. $\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-16\sqrt{2})$.

Aires de surfaces

43. Calculer l'aire de la partie du cône $x^2+y^2=z^2$ découpée par le cylindre $x^2+y^2=2ax$. Rép. $2\pi a^2\sqrt{2}$.
44. Calculer l'aire de la partie du plan $x+y+z=2a$ se trouvant dans le premier trièdre formé par les axes de coordonnées et limitée par le cylindre $x^2+y^2=a^2$. Rép. $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$.
45. Calculer l'aire du segment sphérique (du petit), le rayon de la sphère étant a et le rayon de la base du segment b. Rép. $2\pi(a^2-a\sqrt{a^2-b^2})$.
46. Trouver l'aire de la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ qui est découpée par le cylindre $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$. Rép. $4\pi a^2-8a^2\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

47. Trouver l'aire de la surface du corps qui est formé par l'intersection de deux cylindres $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$. Rép. $16a^2$.
48. Calculer l'aire de la partie de la surface cylindrique $x^2 + y^2 = 2ax$ comprise entre le plan $z = 0$ et le cône $x^2 + y^2 = z^2$. Rép. $8a^2$.
49. Calculer l'aire de la partie de la surface cylindrique $x^2 + y^2 = a^2$ comprise entre les plans $z = mx$ et $z = 0$. Rép. $2ma^2$.
50. Calculer l'aire de la partie du paraboloïde $y^2 + z^2 = 2ax$ comprise entre le cylindre parabolique $y^2 = ax$ et le plan $x = a$. Rép. $\frac{1}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1)$.

Masses, centres de gravité et moments d'inertie de figures planes

(Nous supposerons dans les problèmes 51 à 62 et dans le problème 64 que la densité superficielle est constante et égale à 1.)

51. Quelle est la masse d'un disque circulaire de rayon a sachant que la densité en chaque point P est inversement proportionnelle à la distance au centre (on désignera par K le coefficient de proportionnalité). Rép. $2\pi aK$.
52. Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle équilatéral. On confondra l'axe Ox avec la hauteur et le sommet avec l'origine. Rép. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = 0$.
53. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'un secteur circulaire de rayon a. On confondra la bissectrice de l'angle au centre (2α) avec l'axe Ox. Rép. $x_c = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}$, $y_c = 0$.
54. Trouver les coordonnées du centre de gravité du demi-cercle supérieur d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. Rép. $x_c = 0$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$.
55. Trouver les coordonnées du centre de gravité de l'aire définie par un arc de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Rép. $x_c = a\pi$, $y_c = \frac{5a}{6}$.
56. Trouver les coordonnées du centre de gravité de l'aire de la boucle de la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. Rép. $x_c = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c = 0$.
57. Trouver les coordonnées du centre de gravité de l'aire intérieure à la cardioïde $\rho = a(1 + \cos \theta)$. Rép. $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.
58. Calculer le moment d'inertie de l'aire du rectangle limité par les droites $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ par rapport à l'origine des coordonnées. Rép. $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$.
59. Calculer le moment d'inertie de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: a) par rapport à l'axe Oy ; b) par rapport à l'origine des coordonnées. Rép. a) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; b) $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$.
60. Calculer le moment d'inertie du cercle plein $\rho = 2a \cos \theta$ par rapport au pôle. Rép. $\frac{3}{2}\pi a^4$.

61. Calculer le moment d'inertie de l'aire de la cardioïde $\rho = a(1 - \cos\theta)$ par rapport au pôle. Rép. $\frac{35\pi a^4}{16}$.

62. Calculer le moment d'inertie du disque $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2a^2$ par rapport à l'axe Oy. Rép. $3\pi a^4$.

63. La densité en chaque point d'une plaque carrée de côté a est proportionnelle à la distance de ce point à un sommet du carré. Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un côté passant par ce sommet. Rép. $\frac{1}{40} ka^5 [7\sqrt{2} + 3 \operatorname{Log}(\sqrt{2} + 1)]$, où k est le coefficient de proportionnalité.

64. Calculer le moment d'inertie de l'aire de la figure délimitée par la parabole $y^2 = ax$ et la droite $x = a$ par rapport à la droite $y = -a$. Rép. $\frac{8}{5} a^4$.

Intégrales triples

65. Calculer $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ sachant que le domaine d'intégration est borné par les plans de coordonnées et le plan $x+y+z=1$. Rép. $\frac{\operatorname{Log} 2}{2} - \frac{5}{16}$.

66. Calculer $\int_0^a \left\{ \int_0^x \left[\int_0^y xyz\,dz \right] dy \right\} dx$. Rép. $\frac{a^6}{48}$.

67. Calculer le volume du corps limité par la sphère $x^2+y^2+z^2=4$ et le paraboloïde $x^2+y^2=3z$. Rép. $\frac{19}{6}\pi$.

68*). Calculer les coordonnées du centre de gravité et les moments d'inertie de la pyramide formée par les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Rép. $x_c=\frac{a}{4}$, $y_c=\frac{b}{4}$, $z_c=\frac{c}{4}$; $I_x=\frac{a^3bc}{60}$, $I_y=\frac{b^3ac}{60}$, $I_z=\frac{c^3ab}{60}$, $I_0= =\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$.

69. Calculer le moment d'inertie d'un cône circulaire droit par rapport à son axe. Rép. $\frac{1}{10}\pi h r^4$, où h est la hauteur et r le rayon du cercle de base.

70. Calculer le volume délimité par la surface d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. Rép. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

71. Calculer le moment d'inertie d'un cône circulaire par rapport au diamètre de sa base. Rép. $\frac{\pi h r^2}{60}(2h^2+3r^2)$.

72. Calculer les coordonnées du centre de gravité du corps délimité par une sphère de rayon a et un cône d'angle au sommet 2α, le sommet coïncidant avec le centre de la sphère. Rép. $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \frac{3}{8} a\,(1 + \cos\alpha)$ (on a confondu l'axe du cône avec l'axe Oz et on a placé le sommet à l'origine).

---

*) Dans les problèmes 68, 69, 71, 72, 73 on suppose que la densité est constante et égale à l'unité.

73. Calculer les coordonnées du centre de gravité du corps délimité par une sphère de rayon a et par deux plans passant par le centre et formant un angle de 60°. Rép. $\rho = \frac{9}{16}a$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (la droite d'intersection des plans a été prise pour axe Oz, le centre de la sphère a servi d'origine aux coordonnées sphériques ρ, θ, φ).

74. Se servir de l'égalité $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha$ $(\alpha > 0)$ pour calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}}$. Rép. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Chapitre XV

INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

§ 1. Intégrale curviligne

Considérons un point $P(x, y)$ se mouvant sur une courbe plane L d'un point M à un point N. Le point P est sollicité par une force $\boldsymbol{F}$ qui varie en grandeur et en direction lorsque P se déplace, c'est-à-dire qu'elle est fonction des coordonnées de P :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P).$$

Calculons le travail A de la force $\boldsymbol{F}$ lorsque le point est déplacé de M en N (fig. 342). Découpons à cet effet la courbe MN en n morceaux arbitraires par les points $M = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = N$

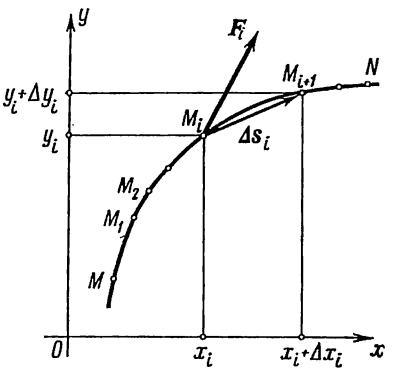


Fig. 342

en partant de M vers N et désignons par $\Delta \boldsymbol{s}_i$ le vecteur $\overline{M_i M_{i+1}}$. Désignons par $\boldsymbol{F}_i$ l'intensité de la force $\boldsymbol{F}$ au point M_i. On peut alors considérer que le produit scalaire $\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i$ représente approximativement le travail de $\boldsymbol{F}$ le long de l'arc $\widehat{M_i M_{i+1}}$:

$$A_i \approx \boldsymbol{F}_i \, \Delta \boldsymbol{s}_i.$$

Soit

$$\boldsymbol{F} = X(x, y)\, \boldsymbol{i} + Y(x, y)\, \boldsymbol{j},$$

où $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont les projections du vecteur $\boldsymbol{F}$ sur les axes Ox et Oy. Désignant par Δx_i et Δy_i les accroissements des coordonnées x_i et y_i lorsqu'on passe de M_i à M_{i+1}, on obtient:

$$\Delta \boldsymbol{s}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j}.$$

Par conséquent,

$$\boldsymbol{F}_i \, \Delta \boldsymbol{s}_i = X(x_i, y_i) \, \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \, \Delta y_i.$$

La valeur approchée du travail A de la force $\boldsymbol{F}$ tout le long de la courbe MN est

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i]. \tag{1}$$

Sans faire de raisonnements rigoureux, indiquons en attendant que si la limite de l'expression du second membre existe lorsque $\Delta \boldsymbol{s}_i \to 0$ (il est alors évident que $\Delta x_i \to 0$ et $\Delta y_i \to 0$), elle exprime le travail de la force $\boldsymbol{F}$ le long de la courbe L entre les points M et N:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i]. \tag{2}$$

La limite *) du second membre est appelée l'*intégrale curviligne* de $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ le long de la courbe L et est désignée par:

$$A = \int_L X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy \tag{3}$$

ou

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy. \tag{3'}$$

On rencontre souvent des limites de sommes (2) en mathématiques et en physique, $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ étant des fonctions de deux variables dans un domaine D.

Les lettres M et N dans l'intégrale (3') ont été mises entre parenthèses pour indiquer que ce ne sont pas des nombres mais les extrémités de la courbe à laquelle est étendue l'intégrale curviligne. Le sens de M à N le long de la courbe est dit *sens d'intégration*.

Si L est une courbe gauche, on définit d'une manière analogue l'intégrale curviligne des trois fonctions $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$,

*) On donne ici à la limite de la somme intégrale le même sens que pour l'intégrale définie, voir § 2, chap. XI, t. I.

$Z(x, y, z)$:

$$\int_L X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k)\,\Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k)\,\Delta z_k.$$

La lettre L sous le signe somme indique que l'intégrale est étendue à la courbe L.

Indiquons deux propriétés de l'intégrale curviligne.

P r o p r i é t é 1. *Une intégrale curviligne est définie par l'expression sous le signe somme, la forme de la courbe d'intégration et le sens d'intégration.*

L'intégrale curviligne change de signe en même temps que le sens d'intégration, étant donné que le vecteur Δs et, par conséquent, ses projections Δx et Δy changent de signe.

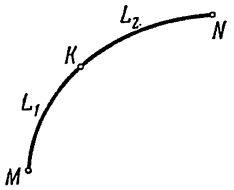


Fig. 343

P r o p r i é t é 2. Découpons la courbe L en deux parties L_1 et L_2 de sorte que $\widehat{MN} = \widehat{MK} + \widehat{KN}$ (fig. 343). Il résulte alors directement de la formule (1)

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(M)}^{(K)} X\,dx + Y\,dy + \int_{(K)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy.$$

Cette relation est valable quel que soit le nombre d'arcs partiels.

Indiquons encore que l'intégrale curviligne conserve son sens lorsque la courbe L est fermée.

L'origine et l'extrémité de la courbe coïncident alors. On ne peut plus écrire dans le cas d'une courbe fermée $\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$, mais $\int_L X\,dx + Y\,dy$ et il faudra indiquer forcément le s e n s d e p a r c o u r s le long de la courbe fermée L. On désigne aussi fréquemment une intégrale curviligne sur une c o u r b e f e r m é e L par le symbole $\oint_L X\,dx + Y\,dy$.

R e m a r q u e. Nous avons été conduits à la notion d'intégrale curviligne en considérant le problème du travail d'une force F sur un parcours curviligne L.

On considérait alors que la force $\boldsymbol{F}$ était une fonction vectorielle des coordonnées du point d'application (x, y); les projections du vecteur variable $\boldsymbol{F}$ sur les axes de coordonnées sont égales aux fonctions scalaires (c'est-à-dire numériques) $X(x, y)$ et $Y(x, y)$. On peut donc considérer une intégrale curviligne de la forme $\int\limits_L X\,dx + Y\,dy$ comme l'intégrale de la fonction vectorielle $\boldsymbol{F}$ donnée par ses composantes X et Y.

L'intégrale de la fonction vectorielle $\boldsymbol{F}$ sur la courbe L est désignée par le symbole

$$\int\limits_L \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s}.$$

Si le vecteur $\boldsymbol{F}$ est déterminé par ses composantes X, Y, Z, cette intégrale s'écrit

$$\int\limits_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Notamment, si le vecteur $\boldsymbol{F}$ se trouve dans le plan Oxy, l'intégrale de ce vecteur se réduit alors à

$$\int\limits_L X\,dx + Y\,dy.$$

Lorsque l'intégrale curviligne d'une fonction vectorielle $\boldsymbol{F}$ est étendue à une courbe fermée L, on l'appelle encore la *circulation* du vecteur $\boldsymbol{F}$ sur le contour fermé L.

§ 2. Calcul de l'intégrale curviligne

Nous nous proposons dans ce paragraphe de préciser la notion de limite de la somme (1) § 1 et, par là même, nous aurons précisé la notion d'intégrale curviligne et nous indiquerons un procédé de calcul.

Supposons la courbe L donnée sous forme paramétrique:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Considérons l'arc de courbe MN (fig. 344). Soient α et β les valeurs du paramètre correspondant aux points M et N. Partageons l'arc MN en morceaux Δs_i par les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, . . ., $M_n(x_n, y_n)$ et posons $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$.

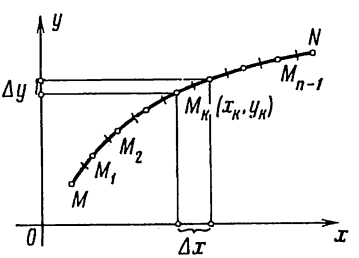


Fig. 344

Considérons l'intégrale curviligne définie au paragraphe précédent

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy. \tag{1}$$

Enonçons sans démontrer un théorème sur l'existence des intégrales curvilignes. *Si les fonctions* $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *sont continues et possèdent des dérivées continues* $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ *sur le segment* $[\alpha, \beta]$ *et si les fonctions de* t $X[\varphi(t), \psi(t)]$ *et* $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ *sont continues sur ce segment, les limites*

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = A, \\ &\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = B \end{aligned} \tag{2}$$

existent, $\bar{x}_i$ *et* $\bar{y}_i$ *étant les coordonnées d'un point de l'arc* Δs_i. *Ces limites ne dépendent pas du mode de découpage de la courbe* L *en arcs partiels* Δs_i *lorsque* $\Delta s_i \to 0$, *ainsi que du choix du point* $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ *sur l'arc* Δs_i, on les appelle les *intégrales curvilignes* et on les désigne par :

$$\begin{aligned} A &= \int_L X(x, y)\,dx, \\ B &= \int_L Y(x, y)\,dy. \end{aligned} \tag{2'}$$

Remarque. Il résulte du théorème que tendent aussi vers cette même limite (c'est-à-dire vers l'intégrale curviligne) les sommes définies au paragraphe précédent, où les points $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ sont les extrémités de l'arc Δs_i, le découpage de L en arcs partiels Δs_i étant arbitraire.

Le théorème qui vient d'être formulé donne un procédé de calcul des intégrales curvilignes.

Ainsi, par définition :

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i, \tag{3}$$

où

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Appliquons la formule des accroissements finis de Lagrange

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

τ_i étant une certaine valeur de t comprise entre les valeurs t_{i-1} et t_i. Le point $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ étant arbitraire sur l'arc Δs_i, choisissons-le de manière

que ses coordonnées correspondent à la valeur du paramètre τ_i :

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Substituant les valeurs trouvées de $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ et Δx_i dans la formule (3), on trouve :

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i)\, \psi(\tau_i)]\, \varphi'(\tau_i)\, \Delta t_i.$$

Le second membre représente la limite d'une somme intégrale pour la fonction continue d'une seule variable $X[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)$ sur le segment $[\alpha, \beta]$.

Par conséquent, cette limite est égale à l'intégrale définie de cette fonction :

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t)\, \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

On obtient d'une manière analogue la formule

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\, dt.$$

On obtient en ajoutant ces égalités membre à membre :

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\}\, dt. \qquad (4)$$

Telle est la formule permettant de calculer une intégrale curviligne.

On calcule de la même façon l'intégrale curviligne

$$\int X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$$

le long d'une courbe gauche définie paramétriquement : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Exemple 1. Calculer l'intégrale curviligne portant sur les fonctions x^3; $3zy^2$; $-x^2y$ (c'est-à-dire sur la fonction vectorielle $x^3\boldsymbol{i} + 3zy^2\boldsymbol{j} - x^2y\boldsymbol{k}$) le long du segment de droite allant du point M (3, 2, 1) au point N (0, 0, 0) (fig. 345).

Solution. Pour trouver les équations paramétriques de la droite d'intégration, écrivons-la sous la forme :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1};$$

désignant par t la valeur commune de ces rapports, on obtient l'équation paramétrique de la droite:

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t.$$

Il correspond à l'origine du segment MN la valeur du paramètre $t = 1$ et à l'extrémité la valeur $t = 0$. On trouve facilement les dérivées de x, y, z par rapport à t (on en a besoin pour calculer l'intégrale curviligne):

$$x'_t = 3, \quad y'_t = 2, \quad z'_t = 1.$$

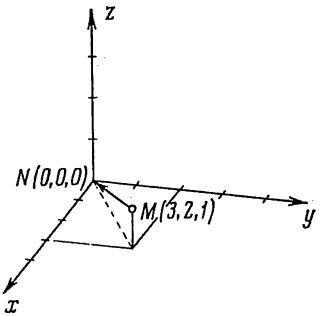


Fig. 345

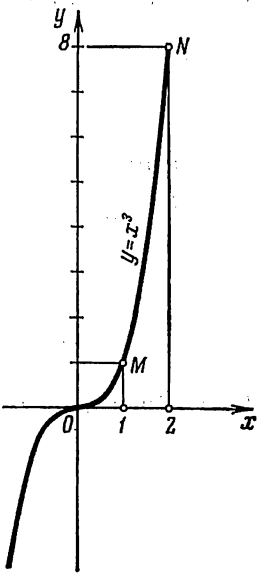


Fig. 346

On calcule maintenant l'intégrale curviligne proposée à l'aide de la formule (4):

$$\int_{(M)}^{(N)} x^3\,dx + 3xy^2\,dy - x^2y\,dz = \int_1^0 [(3t)^3\cdot 3 + 3t\,(2t)^2\cdot 2 - (3t)^2\cdot 2t\cdot 1]\,dt =$$

$$= \int_1^0 87t^3\,dt = -\frac{87}{4}.$$

Exemple 2. Calculer l'intégrale curviligne pour le couple de fonctions: $6x^2y$, $10xy^2$ sur la courbe plane $y = x^3$ entre les points M (1, 1) et N (2, 8) (fig. 346).

Solution. Pour calculer l'intégrale proposée

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx + 10xy^2\,dy$$

il faut avoir les équations paramétriques de la courbe. Il est évident qu'ici x peut servir de paramètre

$$x = x, \quad y = x^3.$$

Le paramètre x varie de $x_1 = 1$ à $x_2 = 2$. Les expressions des dérivées par rapport au paramètre x sont:

$$x'_x = 1, \quad y'_x = 3x^2.$$

Par conséquent,

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx + 10xy^2\,dy = \int_1^2 (6x^2x^3 \cdot 1 + 10xx^6 \cdot 3x^2)\,dx =$$

$$= \int_1^2 (6x^5 + 30x^9)\,dx = [x^6 + 3x^{10}]_1^2 = 3132.$$

Donnons maintenant quelques applications des intégrales curvilignes.

1. Expression de l'aire d'un domaine délimité par une courbe en fonction d'une

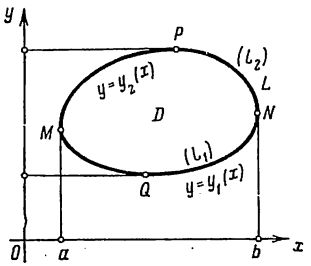


Fig. 347

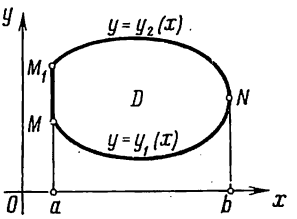


Fig. 348

intégrale curviligne. Soit donné dans le plan Oxy un domaine D limité par un contour L tel que toute parallèle à un quelconque des axes de coordonnées passant par un point intérieur du domaine coupe la frontière L en deux points au plus (c'est-à-dire que le domaine est régulier) (fig. 347).

Soit $[a, b]$ le segment de l'axe Ox sur lequel se projette le domaine D, limité inférieurement par la courbe (l_1):

$$y = y_1(x),$$

et supérieurement par la courbe (l_2):

$$y = y_2(x),$$

$$[y_1(x) \leqslant y_2(x)].$$

L'aire du domaine D est alors égale à

$$S = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Mais la première intégrale est une intégrale curviligne le long de la courbe l_2 $(\widehat{MPN})$, étant donné que $y = y_2(x)$ est l'équation de cette courbe ; par conséquent,

$$\int_a^b y_2(x)\,dx = \int_{MPN} y\,dx.$$

La seconde intégrale est une intégrale curviligne étendue à la courbe l_1 $(\widehat{MQN})$:

$$\int_a^b y_1(x)\,dx = \int_{MQN} y\,dx.$$

On a, en vertu de la propriété 1 des intégrales curvilignes :

$$\int_{MPN} y\,dx = -\int_{NPM} y\,dx.$$

Par conséquent,

$$S = -\int_{NPM} y\,dx - \int_{MQN} y\,dx = -\int_L y\,dx, \tag{5}$$

L étant parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Si une partie de la frontière L est constituée d'un segment M_1M parallèle à l'axe Oy, on a $\int_{(M_1)}^{(M)} y\,dx = 0$ et l'égalité (5) est encore vraie (fig. 348).

On peut montrer d'une manière analogue que

$$S = \int_L x\,dy. \tag{6}$$

Ajoutant membre à membre (5) et (6) et divisant par 2, on obtient encore une formule pour calculer l'aire S :

$$S = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx. \tag{7}$$

Exemple 3. Calculer l'aire de l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Solution. On trouve d'après la formule (7) :

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t\ \ b\cos t - b\sin t\,(-a\sin t)]\,dt = \pi ab.$$

Remarquons que la formule (7) ainsi que les formules (5) et (6) conviennent aussi pour l'aire de domaines dont les frontières sont coupées par les parallèles aux axes de coordonnées en plus de deux points (fig. 349). Pour le démontrer, partageons le domaine donné (fig. 349) en deux domaines réguliers au moyen de la courbe l^*. La formule (7) est vraie pour chacun d'eux. Ajoutant membre à membre, on obtient dans le premier membre l'aire du domaine donné et dans le second l'intégrale curviligne (précédée du coefficient $^1/_2$)

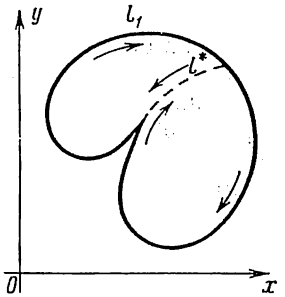


Fig. 349

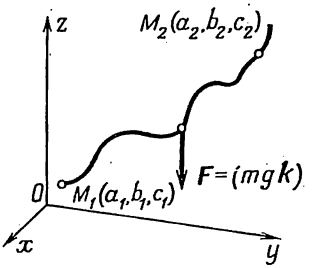


Fig. 350

étendue à toute la frontière, étant donné que l'intégrale sur la ligne de partage l^* est prise deux fois, dans le sens direct et dans le sens inverse, et s'annule donc.

2. Travail d'une force variable $\boldsymbol{F}$ sur un chemin curviligne L. Nous avons indiqué au début du § 1 que le travail d'une force $\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ le long d'une courbe $L = MN$ était égal à l'intégrale curviligne :

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz.$$

Prenons un exemple concret de calcul du travail d'une force.

Exemple 4. Calculer le travail A de la force de pesanteur $\boldsymbol{F}$ déplaçant une masse m du point $M_1(a_1, b_1, c_1)$ au point $M_2(a_2, b_2, c_2)$ le long d'un chemin arbitraire L (fig. 350).

Solution. Les projections de la force de pesanteur $\boldsymbol{F}$ sur les axes de coordonnées sont

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg.$$

Le travail accompli est donc

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)\,dz = mg\,(c_1 - c_2).$$

On voit que, dans le champ de la pesanteur, le travail ne dépend pas du chemin suivi mais seulement du point initial et du point final. Plus exactement, le travail de la force de pesanteur ne dépend que de la différence des niveaux déterminés par le point final et le point initial.

§ 3. Formule de Green

Montrons qu'une intégrale double dans un domaine plan D s'exprime par une intégrale curviligne prise le long de la frontière L de ce domaine.

Soit un domaine D du plan Oxy limité par un contour L, D étant régulier aussi bien selon Ox que Oy. Supposons ce domaine limité inférieurement par la courbe $y = y_1(x)$ et supérieurement par la courbe $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ (fig. 347).

A elles deux, ces courbes forment le contour fermé L. Soient dans D deux fonctions continues $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ douées de dérivées partielles continues. Considérons l'intégrale

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy.$$

On a :

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y}\, dy \right) dx = \int_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))]\, dx. \qquad (1)$$

Notons que l'intégrale

$$\int_a^b X(x, y_2(x))\, dx$$

est numériquement égale à l'intégrale curviligne

$$\int_{(MPN)} X(x, y)\, dx,$$

le long de la courbe MPN d'équations paramétriques

$$x = x, \quad y = y_2(x),$$

x étant le paramètre.

On a donc

$$\int_a^b X(x, y_2(x))\, dx = \int_{MPN} X(x, y)\, dx. \qquad (2)$$

D'une manière analogue, l'intégrale

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\,dx$$

est numériquement égale à

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\,dx = \int_{(MQN)} X(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Substituant les expressions (2) et (3) dans la formule (1), on obtient :

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x, y)\,dx - \int_{MQN} X(x, y)\,dx. \tag{4}$$

Or,

$$\int_{MQN} X(x, y)\,dx = -\int_{NQM} X(x, y)\,dx$$

(voir § 1, propriété 1). On peut donc recopier la formule (4) sous la forme :

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x, y)\,dx + \int_{NQM} X(x, y)\,dx.$$

Mais la somme des intégrales curvilignes du second membre est égale à l'intégrale curviligne sur le contour L tout entier parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. On peut donc mettre cette dernière égalité sous la forme

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_L X(x, y)\,dx, \tag{5}$$

où L indique que le contour fermé L est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Si une partie de la frontière est constituée par un segment l_3 parallèle à l'axe Oy, on a $\int_{l_3} X(x, y)\,dx = 0$ et l'égalité (5) reste vraie.

On trouve de la même façon :

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_L Y(x, y)\,dy. \tag{6}$$

On trouve en retranchant (6) de (5) :

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Si l'on parcourt le contour L dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on a *)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_L X\, dx + Y\, dy.$$

C'est la *formule de Green* (mathématicien anglais, 1793-1841) **).

Nous avons supposé le domaine D régulier. Mais, comme pour le calcul d'une aire (voir § 2), on peut montrer que cette formule reste vraie pour un domaine quelconque admettant un découpage régulier.

§ 4. Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration

Considérons l'intégrale curviligne

$$\int_{(M)}^{(N)} X\, dx + Y\, dy,$$

étendue à une courbe plane L réunissant les points M et N. On supposera que les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ possèdent des dérivées partielles continues dans le domaine considéré D. Voyons dans quelles conditions l'intégrale curviligne ne dépend pas de la forme de la courbe L, mais seulement de la position des points M et N.

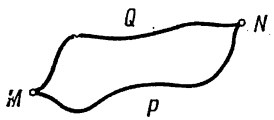


Fig. 351

Considérons deux courbes arbitraires MPN et MQN du domaine considéré D réunissant les points M et N (fig. 351).

Soit

$$\int_{MPN} X\, dx + Y\, dy = \int_{MQN} X\, dx + Y\, dy, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\int_{MPN} X\, dx + Y\, dy - \int_{MQN} X\, dx + Y\, dy = 0.$$

---

*) Lorsque dans une intégrale curviligne sur un contour fermé L on n'a pas indiqué le sens d'intégration, il est sous-entendu qu'il s'agit du sens inverse des aiguilles d'une montre. Si le parcours a lieu dans le sens des aiguilles, il faut avoir soin de le spécifier.

**) Cette formule est un cas particulier d'une formule plus générale établie par le mathématicien russe M. Ostrogradsky.

En vertu des propriétés 1 et 2 des intégrales curvilignes (§ 1), on peut écrire

$$\int\limits_{MPN} X\,dx + Y\,dy + \int\limits_{NQM} X\,dx + Y\,dy = 0,$$

qui représente l'intégrale curviligne sur le contour fermé L

$$\int\limits_{L} X\,dx + Y\,dy = 0. \tag{2}$$

Dans cette dernière formule, l'intégrale curviligne est prise sur un contour L constitué des courbes MPN et NQM. Il est évident que ce contour peut être considéré comme arbitraire.

Par conséquent, il résulte de la condition que l'intégrale sur une courbe réunissant deux points arbitraires M et N ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la position de ces deux points, que l'intégrale curviligne est nulle sur tout contour fermé.

La réciproque est vraie: si une intégrale curviligne est nulle quel que soit le contour fermé, elle ne dépend pas du chemin d'intégration entre deux points, mais seulement de la position de ces deux points. En effet, l'égalité (2) entraîne (1).

Dans l'exemple 4 du § 2 l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin d'intégration; elle dépend du chemin dans l'exemple 3, étant donné que l'intégrale sur le contour fermé considéré n'est pas nulle, mais donne l'aire limitée par ce contour; dans les exemples 1 et 2 les intégrales curvilignes dépendent également du chemin d'intégration.

La question se pose naturellement: à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ pour que l'intégrale curviligne $\int X\,dx + Y\,dy$ soit nulle quel que soit le contour fermé. Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème. *Soient $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ deux fonctions continues dans un domaine D, ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Pour que l'intégrale curviligne sur tout contour fermé L de ce domaine soit nulle, c'est-à-dire pour que l'on ait*

$$\int\limits_{L} X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0, \tag{2'}$$

il faut et il suffit que

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

en tous les points du domaine D.

Démonstration. Prenons un contour fermé arbitraire L dans le domaine D et écrivons la formule de Green correspondant à ce contour:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Si la condition (3) est satisfaite, l'intégrale double de gauche est identiquement nulle et l'on a

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0.$$

On a donc démontré que la condition (3) est suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire que si l'égalité (2) a lieu pour tout contour fermé L dans D, la condition (3) a forcément lieu en chaque point du domaine.

Supposons, au contraire, qu'ait lieu l'égalité (2):

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0,$$

mais que la condition (3) n'ait pas lieu, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

ne serait-ce qu'en un seul point. Soit, par exemple, en un point $P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Comme on a dans le premier membre une fonction continue, elle est positive et supérieure à un certain nombre $\delta > 0$ en tous les points d'un domaine suffisamment petit D' contenant le point $P(x_0, y_0)$. Prenons l'intégrale double de la différence $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ sur ce domaine. Elle est positive. En effet,

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy > \iint_{D'} \delta\,dx\,dy = \delta \iint_{D'} dx\,dy = \delta D' > 0.$$

Or, d'après la formule de Green, le premier membre de cette dernière inégalité est égal à l'intégrale curviligne sur la frontière L' du domaine D', qui est nulle par hypothèse. Donc cette inégalité contredit la condition (2), et la supposition que $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ est différente de zéro, ne serait-ce qu'en un point, est fausse. On a donc

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

en tous les points du domaine D.

Le théorème est complètement démontré.

Nous avons montré au § 9, chap. XIII que la condition

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

traduit le fait que l'expression $X\,dx + Y\,dy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c'est-à-dire que

$$X\,dx + Y\,dy = du(x, y)$$

avec

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Mais alors le vecteur

$$F = Xi + Yj = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

est le gradient de la fonction $u(x, y)$; la fonction $u(x, y)$, dont le gradient est le vecteur $Xi + Yj$, est appelée le *potentiel* de ce vecteur.

Montrons que, *dans ce cas, l'intégrale curviligne* $I = \int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$ *sur une courbe arbitraire* L *réunissant les points* M *et* N *est égale à la différence des valeurs de la fonction* u *en ces points*:

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M).$$

Démonstration. Si $X\,dx + Y\,dy$ est la différentielle totale de la fonction $u(x, y)$, on a $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ et l'intégrale curviligne s'écrit

$$I = \int\limits_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Pour calculer cette intégrale, écrivons les équations paramétriques de la courbe L réunissant M et N:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Nous admettrons qu'il correspond à la valeur $t = t_0$ du paramètre le point M et à la valeur $t = T$ le point N. L'intégrale curviligne se ramène alors à l'intégrale définie

$$I = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt.$$

L'expression entre crochets est une fonction de t qui exprime la dérivée totale de la fonction $u[\varphi(t), \psi(t)]$ par rapport à t. Par conséquent,

$$I = \int_{t_0}^{T} \frac{du}{dt}\, dt = u[\varphi(t), \psi(t)]\Big|_{t_0}^{T} =$$

$$= u[\varphi(t), \psi(t)] - u[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = u(N) - u(M).$$

On voit que l'intégrale curviligne d'une différentielle totale ne dépend pas du chemin d'intégration.

L'intégrale curviligne étendue à une courbe gauche jouit de la même propriété (voir § 7).

Remarque. On a parfois à intégrer l'intégrale curviligne d'une fonction $X(x, y)$ par rapport à l'arc de la courbe d'intégration L:

$$\int_L X(x, y)\, ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(x_i, y_i)\, \Delta s_i, \tag{4}$$

ds étant la différentielle de l'arc. On calcule ces intégrales comme les intégrales curvilignes considérées ci-dessus. Supposons la courbe L donnée par ses équations paramétriques

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ étant des fonctions continues de t.

Soient α et β les valeurs du paramètre t correspondant aux extrémités de l'arc L.

Comme

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt,$$

on obtient la formule suivante pour calculer l'intégrale (4):

$$\int_L X(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta X[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

On peut considérer l'intégrale curviligne par rapport à un arc de la courbe gauche $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$:

$$\int_L X(x, y, z)\, ds = \int_\alpha^\beta X[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \times$$

$$\times \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt.$$

A l'aide des intégrales curvilignes avec pour élément différentiel l'arc ds, on peut déterminer, par exemple, les centres de gravité de courbes pesantes.

Raisonnant comme au § 8, chap. XII (t. I), on obtient les formules suivantes pour le calcul des coordonnées du centre de gravité d'une courbe gauche :

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\,ds}{\int\limits_L ds}, \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\,ds}{\int\limits_L ds}, \quad z_c = \frac{\int\limits_L z\,ds}{\int\limits_L ds}. \tag{5}$$

Exemple. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'une spire de l'hélice

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

sachant que sa densité linéaire est constante.

Solution. On trouve en appliquant la formule (5) :

$$x_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt} = \frac{a}{2\pi} = 0.$$

D'une manière analogue $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\cdot 4\pi^2}{2\pi\cdot 2} = \pi b.$$

On a donc pour les coordonnées du centre de gravité d'une spire de l'hélice

$$x_c = 0,\ y_c = 0,\ z_c = \pi b.$$

§ 5. Intégrales de surface

Soit donné en coordonnées rectangulaires $Oxyz$ un domaine V. Dans V est donnée une surface σ limitée par une courbe gauche λ.

Quant à la surface σ, nous supposerons qu'on a défini en chaque point P un sens positif en indiquant la normale unitaire $\boldsymbol{n}(P)$, dont les cosinus directeurs sont des fonctions continues des coordonnées des points de la surface.

Donnons-nous en chaque point de la surface un vecteur

$$\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

X, Y, Z étant des fonctions continues des coordonnées.

Découpons arbitrairement la surface en aires élémentaires $\Delta\sigma_i$. Prenons un point arbitraire P_i dans chaque élément et considérons la somme

$$\sum_i (\boldsymbol{F}(P_i)\,\boldsymbol{n}(P_i))\,\Delta\sigma_i, \tag{1}$$

$\boldsymbol{F}(P_i)$ étant la valeur du vecteur $\boldsymbol{F}$ au point P_i de $\Delta\sigma_i$, $\boldsymbol{n}(P_i)$ le vecteur unitaire de la normale en ce point, $\boldsymbol{Fn}$ le produit scalaire de ces vecteurs.

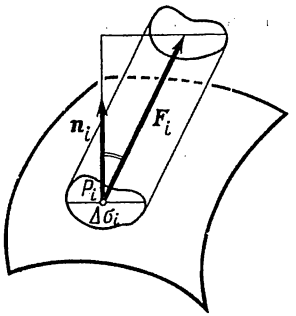


Fig. 352

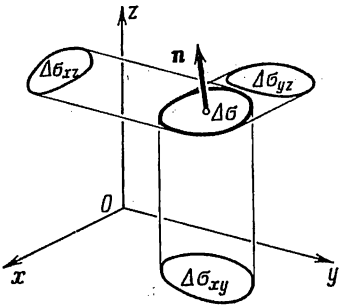


Fig. 353

La limite de la somme (1) relative à toutes les aires $\Delta\sigma_i$ lorsque le plus grand diamètre de ces aires tend vers zéro est, par définition, une *intégrale de surface* que l'on désigne par le symbole

$$\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma.$$

On a donc, par définition *),

$$\lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\to 0} \sum \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\Delta\sigma_i = \iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma. \tag{2}$$

Chaque terme de la somme (1)

$$\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i = F_i\,\Delta\sigma_i\cos(\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{F}_i) \tag{3}$$

admet l'interprétation suivante : ce produit est égal au volume d'un cylindre élémentaire de base $\Delta\sigma_i$ et de hauteur $F_i\cos(\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{F}_i)$. Si $\boldsymbol{F}$ est la vitesse d'un fluide traversant la surface σ, le produit (3) est égal à la quantité de fluide traversant l'élément $\Delta\sigma_i$ en l'unité de temps dans la direction du vecteur $\boldsymbol{n}_i$ (fig. 352).

L'expression $\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma$ donne la quantité totale de fluide tra-

*) Si la surface σ admet en chaque point un plan tangent variant continûment avec P et si la fonction vectorielle $\boldsymbol{F}$ est continue sur cette surface, cette limite existe (nous admettrons sans démonstration ce théorème d'existence des intégrales de surface).

versant en l'unité de temps la surface σ dans le sens positif, $\boldsymbol{F}$ étant le vecteur vitesse du fluide au point donné. C'est pourquoi l'intégrale de surface (2) est encore appelée *flux du champ vectoriel* $\boldsymbol{F}$ *à travers la surface* σ.

Il résulte de la définition de l'intégrale de surface que si l'on découpe la surface σ en morceaux $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, on aura

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma + \ldots + \iint_{\sigma_k} \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ s'écrit:

$$\boldsymbol{n} = \cos(n, x)\, \boldsymbol{i} + \cos(n, y)\, \boldsymbol{j} + \cos(n, z)\, \boldsymbol{k}.$$

Substituant dans l'intégrale (2) les expressions des vecteurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{n}$ en fonction de leurs composantes, on obtient:

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma. \tag{2'}$$

Le produit $\Delta\sigma \cos(n, z)$ est la projection de l'aire $\Delta\sigma$ sur le plan Oxy (fig. 353); on a également pour les autres produits:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma \cos(n, x) &= \Delta\sigma_{yz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, y) &= \Delta\sigma_{xz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, z) &= \Delta\sigma_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

où $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ sont les projections de l'aire $\Delta\sigma$ sur les plans de coordonnées correspondants.

Ceci étant, on écrit encore l'intégrale (2') sous la forme

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma = \iint_{\sigma} X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy. \tag{2''}$$

§ 6. Calcul des intégrales de surface

Le calcul d'une intégrale sur une surface gauche se ramène au calcul d'une intégrale double sur un domaine plan.

Indiquons un procédé de calcul de l'intégrale

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Supposons la surface σ telle que toute droite parallèle à l'axe Oz la coupe en un seul point. L'équation de la surface peut être mise alors sous la forme

$$z = f(x, y).$$

Désignons par D la projection de la surface σ sur le plan Oxy, on a (en vertu de la définition des intégrales de surface) :

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma =$$

$$= \lim_{\operatorname{diam} \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, z_i) \cos(n_i, z)\, \Delta\sigma_i.$$

Prenant ensuite en considération la dernière formule (4) du § 5, on obtient :

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z)\, d\sigma = \lim_{\operatorname{diam} \Delta\sigma_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i))\, (\Delta\sigma_{xy})_i =$$

$$= \pm \lim_{\operatorname{diam} \Delta\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i))\, |\Delta\sigma_{xy}|_i,$$

la dernière expression étant une somme intégrale pour l'intégrale double de la fonction $Z(x, y, f(x, y))$ dans le domaine D. Par conséquent,

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z)\, d\sigma = \pm \iint_{D} Z(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

Le signe plus correspond à $\cos(n, z) \geqslant 0$ et le signe moins à $\cos(n, z) \leqslant 0$.

Si la surface σ ne satisfait pas à la condition indiquée au début de ce paragraphe, on la découpe en morceaux satisfaisant à cette condition et on calcule l'intégrale séparément sur chaque morceau.

On calcule d'une manière analogue les intégrales

$$\iint_{\sigma} X \cos(n, x)\, d\sigma; \iint_{\sigma} Y \cos(n, y)\, d\sigma.$$

Ainsi se trouve justifiée l'expression d'une intégrale de surface sous la forme (2″) du § 5.

On pourra considérer alors que le second membre de l'égalité (2″) est une somme d'intégrales doubles sur les projections correspondantes du domaine σ, les signes de ces intégrales doubles (ou, comme on dit encore, les signes des produits $dy\, dz$, $dx\, dz$, $dx\, dy$) étant pris conformément à la règle indiquée.

Exemple 1. Considérons une surface fermée σ coupée en deux points au plus par toute parallèle à l'axe Oz.

Considérons l'intégrale

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Nous choisirons comme normale positive la normale extérieure. Nous pouvons découper cette surface en deux parties, inférieure et supérieure, d'équations:

$$z = f_1(x, y) \text{ et } z = f_2(x, y).$$

Désignons par D la projection de σ sur le plan Oxy (fig. 354); on a:

$$\iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma = \iint_D f_2(x, y)\, dx\, dy - \iint_D f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

La seconde intégrale a été affectée du signe moins, car dans l'intégrale de surface le produit $dx\, dy$ pour la surface $z = f_1(x, y)$ doit être précédé du signe moins, étant donné que $\cos(n, z)$ est négatif.

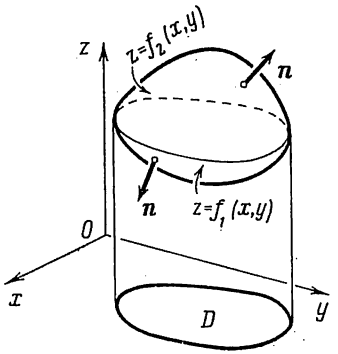
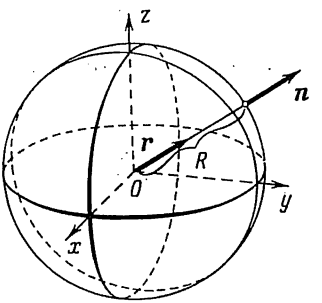


Fig. 354



ig. 355

Or, la différence des intégrales du second membre représente le volume délimité par la surface σ. Donc le volume du corps délimité par la surface fermée σ est égal à l'intégrale de surface

$$V = \iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

E x e m p l e 2. Une charge électrique positive e placée à l'origine des coordonnées crée un champ vectoriel dont la distribution du vecteur $\boldsymbol{F}$ est donnée en chaque point par la loi de Coulomb:

$$\boldsymbol{F} = k \frac{e}{r^2} \boldsymbol{r}.$$

r étant la distance du point considéré à l'origine et $\boldsymbol{r}$ le vecteur unitaire du rayon vecteur dirigé vers le point considéré (fig. 355); k est un facteur constant.

Calculer le flux du champ de vecteurs à travers une sphère de rayon R centrée à l'origine.

S o l u t i o n. Considérant que $r = R = \text{const}$, on a

$$\iint_\sigma k \frac{e}{r^2} \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \frac{ke}{R^2} \iint_\sigma \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Mais la dernière intégrale est égale à l'aire σ de la sphère. En effet, le produit scalaire rn est constamment égal à l'unité, et il reste

$$\iint_{\sigma} rn\, d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum r_k n_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$

Par conséquent, le flux cherché est

$$\frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

§ 7. Formule de Stokes

Soit donnée une surface σ telle que toute parallèle à Oz la coupe en un seul point. Désignons par λ sa frontière. La normale positive à la surface n sera celle formant avec Oz un angle aigu (fig. 356).

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface. Les cosinus directeurs de la normale à la surface ont pour expression (voir § 6, chap. IX, t. I):

$$\left.\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, y) &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous supposerons que la surface σ se trouve tout entière dans un domaine spatial V. Soit donnée dans V une fonction continue $X(x, y, z)$ avec ses dérivées partielles du premier ordre. Considérons l'intégrale curviligne prise le long du contour λ

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\, dx.$$

On a le long de λ $z = f(x, y)$, x, y étant les coordonnées des points de la courbe L, projection de λ sur le plan Oxy (fig. 356). On peut écrire, par conséquent,

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\, dx. \quad (2)$$

Cette dernière intégrale est une intégrale curviligne prise le long de L. Transformons-la en appliquant la formule de Green, en posant

$$X(x, y, f(x, y)) = \overline{X}(x, y), \quad 0 = \overline{Y}(x, y).$$

Remplaçant dans la formule de Green $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ par leurs expressions, on obtient:

$$-\iint_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y}\, dx\, dy = \int_L X(x, y, f(x, y))\, dx, \tag{3}$$

le domaine D étant limité par L. Dérivons la fonction composée $X(x, y, f(x, y))$ par rapport à y:

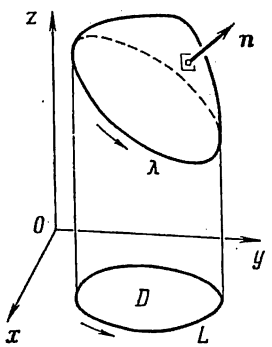


Fig. 356

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \tag{4}$$

On obtient en substituant l'expression (4) dans le premier membre de (3):

$$-\iint_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] dx\, dy = \int_L X(x, y, f(x, y))\, dx.$$

Compte tenu de (2), cette dernière égalité s'écrit:

$$\int_\lambda X(x, y, z)\, dx = -\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{5}$$

Les deux dernières intégrales se transforment en intégrales de surface. En effet, il résulte de la formule (2″) du § 5 qu'on a pour toute fonction $A(x, y, z)$ l'égalité

$$\iint_\sigma A(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma = \iint_D A\, dx\, dy.$$

Ceci étant, les intégrales du second membre de (5) se transforment comme suit:

$$\left.\begin{aligned} &\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z)\, d\sigma, \\ &\iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z)\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Transformons la dernière intégrale en appliquant les formules (1) du présent paragraphe: on trouve en faisant le quotient de la seconde égalité (1) par la troisième:

$$\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n, z) = -\cos(n, y).$$

Par conséquent,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n, y)\,d\sigma. \tag{7}$$

On obtient en substituant les expressions (6) et (7) dans (5) :

$$\int_\lambda X(x, y, z)\,dx = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n, z)\,d\sigma + \\ + \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n, y)\,d\sigma. \tag{8}$$

Le sens de parcours de λ doit être tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par la normale n verrait le contour parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

La formule (8) est vraie pour toute surface pouvant être découpée en deux parties d'équations de la forme $z = f(x, y)$.

On obtient d'une façon analogue les formules

$$\int_\lambda Y(x, y, z)\,dy = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(n, x) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(n, z)\right] d\sigma, \tag{8'}$$

$$\int_\lambda Z(x, y, z)\,dz = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(n, y) + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(n, x)\right] d\sigma. \tag{8''}$$

Ajoutons membre à membre les égalités (8), (8′) et (8″) ; on obtient la formule

$$\int_\lambda X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(n, z) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(n, y)\right] d\sigma. \tag{9}$$

C'est la *formule de Stokes* (mathématicien anglais (1819-1903)). Elle permet de transformer une intégrale de surface σ en une intégrale curviligne prise sur la frontière λ de cette surface, le sens de parcours de la frontière étant celui spécifié plus haut.

Le vecteur $\boldsymbol{B}$ de composantes

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

est appelé le *vecteur tourbillon* ou *rotationnel* de la fonction vectorielle $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ et on l'écrit symboliquement rot $\boldsymbol{F}$.

Par conséquent, on peut recopier la formule (9) sous la forme

vectorielle

$$\int_{\lambda} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = \iint_{\sigma} \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, d\sigma, \tag{9'}$$

et le théorème de Stokes s'énonce :

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé limitant une surface est égale au flux de son rotationnel à travers cette surface.

Remarque. Si la surface σ est un morceau de plan parallèle à Oxy, on a $\Delta z = 0$ et on retrouve la formule de Green comme cas particulier de la formule de Stokes.

Il résulte de la formule (9) que si

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

l'intégrale curviligne est nulle sur toute courbe gauche fermée λ :

$$\int_{\lambda} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0. \tag{11}$$

L'intégrale curviligne ne dépend donc pas de la forme de la courbe d'intégration.

Comme dans le cas d'une courbe plane, on montre que les conditions mentionnées (10) sont non seulement suffisantes mais aussi nécessaires pour avoir l'égalité (11).

Ces conditions étant satisfaites, l'expression sous le signe somme est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y, z)$:

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = du\,(x, y, z)$$

et, par conséquent,

$$\int_{(M)}^{(N)} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

On le démontre comme pour la formule correspondante dans le cas d'une fonction de deux variables (voir § 4).

Exemple 1. Ecrivons les formules fondamentales de la dynamique du point matériel

$$m\frac{dv_x}{dt} = X; \qquad m\frac{dv_y}{dt} = Y; \qquad m\frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Ici m est la masse du point ; X, Y, Z sont les composantes de la force sollicitant le point ; $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ les composantes de la vitesse v. Multiplions les deux membres des équations ci-dessus par les expressions

$$v_x\, dt = dx, \; v_y\, dt = dy, \; v_z\, dt = dz.$$

On obtient en ajoutant membre à membre les égalités données:

$$m\,(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

$$m\frac{1}{2}\,d(v_x^2+v_y^2+v_z^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Comme $v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2$, on peut écrire :

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Calculons les intégrales des deux membres entre deux points M_1 et M_2 sur la trajectoire:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

v_1 et v_2 étant les vitesses aux points M_1 et M_2.

Cette dernière égalité traduit le théorème des forces vives: la variation de l'énergie cinétique entre deux points est égale au travail de la force agissant sur la masse m.

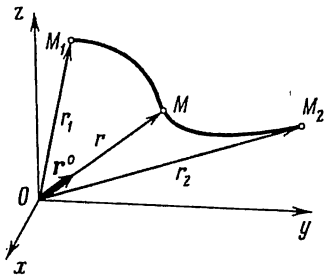


Fig. 357

Exemple 2. Calculer le travail de la force d'attraction newtonienne d'une masse immobile m agissant sur une masse unité se déplaçant entre deux points $M_1\,(a_1,\ b_1,\ c_1)$ et $M_2\,(a_2,\ b_2,\ c_2)$.

Solution. Prenons l'origine des coordonnées au centre attractif. Désignons par $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur (fig. 357) mené de l'origine au point où se trouve la masse unité, et soit $\boldsymbol{r}^0$ le vecteur unitaire de cette direction. On a alors $\boldsymbol{F} = -\frac{km}{r^2}\boldsymbol{r}^0$, k étant la constante universelle de gravitation. Les composantes de $\boldsymbol{F}$ sur les axes sont respectivement

$$X = -km\,\frac{1}{r^2}\,\frac{x}{r}; \qquad Y = -km\,\frac{1}{r^2}\,\frac{y}{r}; \qquad Z = -km\,\frac{1}{r^2}\,\frac{z}{r}.$$

Le travail de la force $\boldsymbol{F}$ sur l'arc M_1M_2 est

$$A = -km\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = -km\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{r\,dr}{r^3} = km\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

(étant donné que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$). Désignant par r_1 et r_2 les longueurs des rayons vecteurs des points M_1 et M_2, on obtient:

$$A = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Par conséquent, ici encore l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin d'intégration. La fonction $u = \frac{km}{r}$ est appelée le *potentiel* du champ

d'attraction de la masse m. Dans notre cas

$$X=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$A = u(M_2) - u(M_1),$$

c'est-à-dire que le travail pour déplacer la masse unité est égal à la différence de potentiel entre les points final et initial.

§ 8. Formule d'Ostrogradsky

Soit un domaine régulier V de l'espace à trois dimensions, limité par une surface fermée σ et ayant pour projection sur le plan Oxy un domaine régulier D à deux dimensions. Nous supposerons que l'on peut partager la surface σ en trois parties σ_1, σ_2, σ_3 de sorte que les équations des deux premières s'écrivent

$$z = f_1(x, y) \quad \text{et} \quad z = f_2(x, y),$$

$f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ étant continues dans le domaine D, et la troisième partie σ_3 étant une surface cylindrique de génératrices parallèles à l'axe Oz.

Considérons l'intégrale

$$I=\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Intégrons d'abord sur les z :

$$I=\iint\limits_D \left(\int\limits_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz\right) dx\, dy =$$

$$=\iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy. \qquad (1)$$

Définissons sur la surface σ la normale positive, dirigée vers l'extérieur. Alors $\cos(n, z)$ sera positif sur la surface σ_2 et négatif sur la surface σ_1 : il est nul sur la surface σ_3.

Les intégrales doubles du second membre de l'égalité (1) sont égales aux intégrales de surface correspondantes

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma, \qquad (2')$$

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z)\,(-\cos(n, z))\, d\sigma.$$

Nous avons écrit dans la dernière intégrale $(-\cos(n, z))$ parce que l'élément d'aire $\Delta\sigma_1$ de σ_1 est lié à l'élément d'aire Δs du domaine

D par la relation $\Delta s = \Delta\sigma_1 [-\cos(n, z)]$, étant donné que l'angle (n, z) est obtus

Ainsi,

$$\iint_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= -\iint_{\sigma_1} Z(x, y, f_1(x, y)) \cos(n, z)\, d\sigma. \qquad (2'')$$

Substituant (2′) et (2″) dans (1), on obtient :

$$\iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, a\sigma.$$

Pour la commodité des calculs à suivre, recopions cette dernière égalité en lui ajoutant la quantité $\iint_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma = 0$ (on a $\cos(n, z) = 0$ sur σ_3) :

$$\iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{\sigma_2} Z \cos(n, z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z \cos(n, z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} Z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Or, la somme des intégrales du second membre est égale à l'intégrale sur toute la surface σ fermée ; par conséquent,

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_\sigma Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

On obtient d'une manière analogue les relations :

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_\sigma Y(x, y, z) \cos(n, y)\, d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_\sigma X(x, y, z) \cos(n, x)\, d\sigma.$$

Ajoutant membre à membre ces trois dernières égalités, on

obtient la *formule d'Ostrogradsky* *) :

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma (X\cos(n, x)+Y\cos(n, y)+Z\cos(n, z))\,d\sigma. \qquad (2)$$

L'expression $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ est appelée la *divergence du vecteur*

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

et on l'écrit div $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\,.$$

Indiquons que cette formule est vraie pour tout domaine pouvant être partagé en domaines partiels satisfaisant aux conditions mentionnées au début de ce paragraphe.

Donnons une interprétation hydrodynamique de la formule établie.

Supposons que $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ soit le vecteur vitesse d'un fluide traversant le domaine V. L'intégrale de surface dans (2) est alors l'intégrale de la projection de $\boldsymbol{F}$ sur la normale extérieure $\boldsymbol{n}$; elle donne la quantité de fluide sorti du volume V à travers la surface σ pendant l'unité de temps (ou qui y est entré, si l'intégrale est négative). Cette quantité s'exprime au moyen de l'intégrale triple de div $\boldsymbol{F}$.

Si div $\boldsymbol{F} \equiv 0$, l'intégrale double sur toute surface fermée est nulle, la quantité de fluide entré ou sorti est nulle. Plus précisément, la quantité de fluide entré dans le volume donné est égale à la quantité de fluide sorti.

Sous forme vectorielle, la formule d'Ostrogradsky s'écrit

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dv = \iint\limits_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\,ds \qquad (1')$$

et elle s'énonce: *l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel* $\boldsymbol{F}$ *dans un volume est égale au flux du champ vectoriel à travers la surface limitant ce volume.*

§ 9. Opérateur hamiltonien et quelques applications

Soit donnée une fonction $u = u(x, y, z)$. En chaque point du domaine où la fonction $u(x, y, z)$ est définie et dérivable, est déter-

*) Cette formule (appelée parfois formule d'Ostrogradsky-Gauss) a été découverte par le célèbre mathématicien russe M. Ostrogradsky (1801-1861) qui l'a publiée en 1828 dans son article « Notes sur la théorie de la chaleur ».

miné le gradient :

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1}$$

Parfois le gradient de la fonction $u(x, y, z)$ est désigné ainsi :

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}; \tag{2}$$

le signe ∇ se lit « nabla »

1. Il est commode d'écrire sous une forme symbolique l'égalité (2) :

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u \tag{2'}$$

et de considérer le symbole

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

comme un «vecteur symbolique ». Ce vecteur symbolique est appelé *opérateur hamiltonien* ou opérateur nabla (opérateur ∇). Il découle des formules (2) et (2′) que quand on « multiplie » l'opérateur symbolique ∇ par une fonction scalaire u, on obtient le gradient de cette fonction :

$$\nabla u = \operatorname{grad} u. \tag{4}$$

2. On peut former le produit scalaire du vecteur symbolique ∇ par le vecteur $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$$

(voir § 8). Ainsi,

$$\nabla \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}. \tag{5}$$

3. Formons le produit vectoriel du vecteur symbolique ∇ par le vecteur $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$$

(voir § 7). Ainsi,

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

Il découle de ce qui vient d'être dit que l'utilisation du vecteur symbolique ∇ permet d'exprimer sous une forme très succincte les opérations vectorielles. Considérons encore quelques formules.

4. Le champ vectoriel $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ est dit *champ vectoriel potentiel* si le vecteur $\boldsymbol{F}$ est le gradient d'une certaine fonction scalaire $u(x, y, z)$:

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$$

ou

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Dans ce cas les projections du vecteur $\boldsymbol{F}$ seront

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Il découle de ces égalités (voir t. ch. VIII, § 12):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Par conséquent, pour le vecteur $\boldsymbol{F}$ considéré

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0.$$

Nous obtenons ainsi:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0. \tag{7}$$

En appliquant l'opérateur ∇, on peut écrire en vertu des formules (4) et (6) l'égalité (7) sous la forme:

$$(\nabla \times \nabla u) = 0. \tag{7'}$$

Utilisant la propriété que lors de la multiplication d'un produit vectoriel par un scalaire il suffit de multiplier par ce scalaire l'un des facteurs seulement, nous écrirons:

$$(\nabla \times \nabla)\, u = 0. \tag{7''}$$

L'opérateur ∇ possède de nouveau les propriétés d'un vecteur usuel: le produit vectoriel du vecteur par lui-même est nul.

Le champ vectoriel $F(x, y, z)$ pour lequel $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ est dit *irrotationnel*. Il découle de l'égalité (7) que tout champ potentiel est irrotationnel.

L'inverse est vrai également; autrement dit, si un certain champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ est irrotationnel, il est potentiel. La validité de cette affirmation découle des raisonnements conduits à la fin du § 7.

5. Le champ vectoriel $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ pour lequel

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0,$$

c'est-à-dire le champ vectoriel, qui ne recèle pas de sources (voir § 8), est appelé *solénoïdal* ou *tubulaire*. Démontrons que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0, \tag{8}$$

autrement dit que le champ rotationnel ne recèle pas de sources.

En effet, si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$, alors

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

et c'est pourquoi

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

L'égalité (8) s'écrira à l'aide de l'opérateur ∇:

$$\nabla(\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0. \tag{8'}$$

La partie gauche de cette égalité peut être considérée comme le produit mixte vectoriel-scalaire des trois vecteurs ∇, ∇, $\boldsymbol{F}$ dont deux sont identiques. Ce produit est évidemment égal à zéro.

6. Soit donné un champ scalaire $u = u(x, y, z)$. Définissons le champ des gradients:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial u} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Nous trouvons ensuite

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

ou

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Le second membre de cette égalité est noté

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{10}$$

ou symboliquement

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u.$$

Le symbole

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est appelé *opérateur de Laplace*.

Par conséquent, l'égalité (9) peut s'écrire :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u. \tag{11}$$

A l'aide de l'opérateur ∇ l'égalité (11) s'écrira sous la forme

$$(\nabla\nabla u) = \Delta u, \quad \text{c.-à-d.} \quad \Delta = \nabla^2. \tag{11'}$$

Notons que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{12}$$

ou

$$\Delta u = 0 \tag{12'}$$

est appelée *équation de Laplace*. Les fonctions vérifiant l'équation de Laplace sont appelées *fonctions harmoniques*.

Exercices

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $\int y^2\,dx + 2xy\,dy$ sur le cercle $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Rép. 0.
2. $\int y\,dx - x\,dy$ sur l'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Rép. $-2\pi ab$.
3. $\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ sur un cercle centré à l'origine. Rép. 0.
4. $\int \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ sur la droite $y=x$ de $x=1$ à $x=2$. Rép. Log 2.
5. $\int yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ sur l'hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$, t variant entre 0 et 2π. Rép. 0.
6. $\int x\,dy - y\,dx$ sur l'hypocycloïde $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Rép. $\frac{3}{4}\pi a^2$ (le double de l'aire limitée par la courbe).
7. $\int x\,dy - y\,dx$ étendue à la boucle du folium de Descartes $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Rép. $3a^2$ (le double de l'aire limitée par la boucle).
8. $\int x\,dy - y\,dx$ sur la courbe $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Rép. $-6\pi a^2$ (le double de l'aire comprise entre un arc de la cycloïde et l'axe Ox).

Démontrer que :

9. $\operatorname{grad}(c\varphi) = c \operatorname{grad}\varphi$, où c est constant.
10. $\operatorname{grad}(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 \operatorname{grad}\varphi + c_2 \operatorname{grad}\psi$, où c_1 et c_2 sont constants.
11. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$.
12. Calculer $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

    Rép. $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; $2\boldsymbol{r}$; $-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$; $f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.
13. Démontrer que $\operatorname{div}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{div}\boldsymbol{B}$.
14. Calculer $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Rép. 3.
15. Calculer $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\varphi)$, où $\boldsymbol{A}$ est une fonction vectorielle et φ une fonction scalaire. Rép. $\varphi \operatorname{div}\boldsymbol{A} + (\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{A})$.

16. Calculer div $(r \cdot c)$, où c est un vecteur constant. Rép. $\frac{(c \cdot x)}{r}$.

17. Calculer div $B(rA)$. Rép. AB.

Démontrer que :

18. rot $(c_1 A_1 + c_2 A_2) = c_1$ rot $A_1 + c_2$ rot A_2, où c_1 et c_2 sont des constantes.

19. rot $(Ac) =$ grad $A \times c$, où c est un vecteur constant.

20. rot rot $A =$ grad div $A - \Delta A$.

21. $A \times$ grad $\varphi =$ rot (φA).

Intégrales de surface

22. Montrer que $\iint \cos(nz)\, d\sigma = 0$, n étant la normale à la surface fermée σ.

23. Trouver le moment d'inertie d'un segment sphérique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ coupé par le plan $z = H$ par rapport à l'axe Oz. Rép. $\frac{2\pi R}{3}(2R^3 - 3R^2H + H^3)$.

24. Trouver le moment d'inertie de la portion du paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 = 2cz$ coupée par le plan $z = c$ par rapport à l'axe Oz. Rép. $4\pi c^4 \frac{6\sqrt{3}+1}{15}$.

25. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la partie de la surface conique $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$ coupée par le plan $z = H$. Rép. $0;\ 0;\ \frac{2}{3}H$.

26. Calculer les coordonnées du centre de gravité du segment de la surface sphérique $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ coupé par le plan $z = H$. Rép. $\left(0,\ 0,\ \frac{R+H}{2}\right)$.

27. Calculer $\iint\limits_{\sigma} [x \cos(nx) + y \cos(ny) + z \cos(nz)]\, d\sigma$ sur une surface fermée. Rép. $3V$, V étant le volume intérieur à la surface σ.

28. Calculer $\iint\limits_{S} z\, dx\, dy$, où S désigne le côté extérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Rép. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

29. Calculer $\iint\limits_{S} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$, où S est le côté extérieur de la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Rép. πR^4.

30. Calculer $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, où S désigne la surface latérale du cône $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leqslant z \leqslant b$. Rép. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

31. A l'aide de la formule de Stokes transformer l'intégrale $\int\limits_{L} y\, dx + z\, dy + x\, dz$. Rép. $-\iint\limits_{S} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, ds$.

Trouver les intégrales curvilignes directement et en appliquant la formule de Stokes:

32. $\int\limits_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, où L est le cercle x^2+y^2+ $+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. Rép. 0.

33. $\int\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, où L est un cercle $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. Rép. $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Appliquant la formule d'Ostrogradsky, transformer les intégrales de surface en intégrales de volume:

34. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$. Rép. $\iiint\limits_V 3dx\,dy\,dz=3V$.

35. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,(dy\,dz+dx\,dz+dx\,dy)$. Rép. $2\iiint\limits_V (x+y+$ $+z)\,dx\,dy\,dz$.

36. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy+yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx$. Rép. 0.

37. $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$. Rép. $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\times$ $\times\,dx\,dy\,dz$.

Appliquant la formule d'Ostrogradsky calculer les intégrales suivantes:

38. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$, où S est la surface de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Rép. $4\pi abc$.

39. $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,ds$, où S est la surface de la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$. Rép. $\frac{12}{5}\pi R^5$.

40. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, où S est la surface du cône $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-$ $-\frac{z^2}{b^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$. Rép. $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

41. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, où S est la surface du cylindre $x^2+y^2=a^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$. Rép. $3\pi\,a^2H$.

42. Démontrer l'identité $\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$, où C est le contour limitant le domaine D et $\frac{du}{\partial n}$ la dérivée selon la normale extérieure.

Solution.

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_C -Y\,dx+X\,dy=$$

$$=\int_C [-Y\cos(s, x)+X\sin(s, x)]\,ds,$$

où (s, x) est l'angle entre la tangente au contour C et l'axe Ox. Si l'on désigne par (n, x) l'angle entre la normale et Ox, on a $\sin(s, x)=\cos(n, x)$, $\cos(s, x)=-\sin(n, x)$. Par conséquent,

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_C [X\cos(n, x)+Y\sin(n, x)]\,ds.$$

Posant $X=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, on obtient :

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy=\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(n, x)\right) ds$$

ou

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy=\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

43. Etablir l'identité (appelée *formule de Green*)

$$\iiint_V (v\,\Delta u-u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz=\iint_\sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

u et v étant des fonctions continues et ayant des dérivées du second ordre continues dans le domaine D.

Les symboles Δu et Δv représentent :

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Solution. Dans la formule

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint_\sigma [X\cos(n, x)+Y\cos(n, y)+Z\cos(n, z)]\,d\sigma$$

posons

$$X=vu'_x-uv'_x,$$
$$Y=vu'_y-uv'_y,$$
$$Z=vu'_z-uv'_z.$$

On a

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=v(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})-u(v''_{xx}+v''_{yy}+v''_{zz})=v\Delta u-u\Delta v,$$

$$X\cos(n, x)+Y\cos(n, y)+Z\cos(n, z)=$$

$$=v(u'_x\cos(n, x)+u'_y\cos(n, y)+u'_z\cos(n, z))-u(v'_x\cos(n, x)+$$

$$+v'_y\cos(n, y)+v'_z\cos(n, z))=v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Par conséquent,

$$\iiint\limits_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma.$$

44. Etablir l'identité

$$\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma,$$

où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

S o l u t i o n. Posons dans la formule de Green, établie dans l'exemple précédent, $v = 1$. Alors $\Delta v = 0$ et l'identité est démontrée.

45. Si $u(x, y, z)$ est une fonction harmonique dans un certain domaine, c'est-à-dire une fonction telle qu'en chaque point de ce domaine est vérifiée l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

on a sur toute surface fermée σ

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

S o l u t i o n. Cela résulte directement de la formule du problème 44.

46. Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique dans un domaine V et considérons dans V une sphère $\bar{\sigma}$ de centre $M(x_1, y_1, z_1)$ et de rayon R. Montrer que

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma.$$

S o l u t i o n. Considérons le domaine Ω limité par les deux sphères $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ de rayons R et ρ ($\rho < R$), de centres au point $M(x_1, y_1, z_1)$. Appliquons à ce domaine la formule de Green du problème 43, où u sera la fonction indiquée ci-dessus et v la fonction

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

On s'assure directement en dérivant et en substituant que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$. Par conséquent,

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}+\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

ou

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) d\sigma - \iint\limits_{\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Sur les surfaces $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ la quantité $\frac{1}{r}$ est constante $\left(\frac{1}{R}\text{ et }\frac{1}{\rho}\right)$ et on peut la sortir de sous le signe d'intégration. En vertu du résultat établi dans

le problème 45 :

$$\frac{1}{R}\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0\,;$$

$$\frac{1}{\rho}\iint\limits_{\bar{\sigma}}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Par conséquent,

$$-\iint\limits_{\sigma}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma+\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma=0,$$

mais

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr}=-\frac{1}{r^2}.$$

Donc

$$+\iint\limits_{\sigma}u\frac{1}{r^2}\,d\sigma-\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\frac{1}{r^2}\,d\sigma=0$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\sigma}u\,d\sigma=\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\,d\sigma. \tag{1}$$

Appliquons le théorème de la moyenne à l'intégrale de gauche :

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\sigma}u\,d\sigma=\frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{\rho^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}d\sigma, \tag{2}$$

où $u(\xi,\eta,\zeta)$ est un point sur la surface de la sphère de rayon ρ et de centre au point $M(x_1, y_1, z_1)$.

Faisons tendre ρ vers zéro ; alors $u(\xi,\eta,\zeta)\to u(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}d\sigma=\frac{4\pi\rho^2}{\rho^2}=4\pi.$$

Donc, lorsque $\rho\to 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\,d\sigma\to u(x_1, y_1, z_1)\,4\pi.$$

En outre, étant donné que le second membre de l'égalité (1) ne dépend pas de ρ, lorsque $\rho\to 0$, on obtient en définitive :

$$\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\,d\sigma=4\pi u(x_1, y_1, z_1)$$

ou

$$u(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\,d\sigma.$$

Chapitre XVI

SÉRIES

§ 1. Série. Somme d'une série

Définition 1. Soit donnée une suite numérique infinie *)

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

L'expression

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

est appelée une *série numérique*, les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont les *termes* de la série.

Définition 2. La somme des n premiers termes de la série est appelée *somme partielle* s_n:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Considérons les sommes partielles:

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Si la limite suivante existe et est finie:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

on l'appelle la *somme de la série* (1) et on dit que la *série converge*.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas (par exemple, $s_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$), on dit que la *série* (1) *diverge et qu'elle n'a pas de somme*.

---

*) On dit qu'une suite est donnée lorsqu'on connaît la loi permettant de calculer tout terme u_n, une fois donné n.

Exemple. Considérons la série

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

C'est une *progression géométrique* de premier terme a et de raison q ($a \neq 0$).

La somme des n premiers termes de la progression géométrique (lorsque $q \neq 1$) est égale à

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

ou

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1) Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et, par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Ainsi, lorsque $|q| < 1$, la série (2) converge et sa somme est

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

2) Si $|q| > 1$, $|q^n| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et $\frac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty$ lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas. Ainsi, lorsque $|q| > 1$, la série (2) diverge.

3) Si $q = 1$, la série (2) s'écrit

$$a + a + a + \ldots$$

Par conséquent,

$$s_n = na, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

la série diverge.

4) Si $q = -1$, la série (2) s'écrit

$$a - a + a - a + \ldots$$

et

$$s_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ a \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

s_n n'a pas de limite, la série diverge.

Ainsi, la progression géométrique (de premier terme non nul) converge si, et seulement si, sa raison est plus petite que l'unité en valeur absolue.

Théorème 1. *Si la série obtenue en supprimant dans* (1) *plusieurs termes converge, la série proposée converge également.*

Réciproquement, si la série proposée converge, la série obtenue en supprimant plusieurs termes converge également.

En d'autres termes, *on n'affecte pas le caractère de la convergence d'une série en y supprimant un nombre fini de termes.*

Démonstration. Soient s_n la somme des n premiers termes de la série (1), c_k la somme des k termes supprimés (notons

que si n est suffisamment grand, tous les termes rejetés sont compris dans la somme s_n) et soit encore σ_{n-k} la somme des termes de la série entrant dans s_n mais non pas dans c_k. On a

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

c_k étant un nombre constant ne dépendant pas de n.

Il résulte de cette dernière relation que si $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ existe, alors $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existe aussi; si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existe, il en est de même de $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, ce qui démontre le théorème.

Pour terminer ce paragraphe, indiquons deux propriétés élémentaires des séries.

Théorème 2. *Si la série*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{3}$$

converge et si sa somme est s, la série

$$ca_1 + ca_2 + \ldots, \tag{4}$$

où c est un nombre arbitraire fixe, converge aussi et sa somme est cs.

Démonstration. Soient s_n et σ_n respectivement les sommes partielles de (3) et (4). On a

$$\sigma_n = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots + a_n) = cs_n.$$

Il en résulte que la limite de la somme partielle σ_n de (4) existe, car

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

Ainsi, la série (4) converge et sa somme est cs.

Théorème 3. *Si les séries*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{5}$$

et

$$b_1 + b_2 + \ldots \tag{6}$$

convergent et ont pour sommes $\bar{s}$ et $\bar{\bar{s}}$, les séries

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots \tag{7}$$

et

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \tag{8}$$

convergent également et ont pour sommes $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ et $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Démonstration. Montrons la convergence de la série (7). Désignons sa somme partielle d'indice n par σ_n et les sommes par-

tielles de (5) et (6) respectivement par $\overline{s}_n$ et $\overline{\overline{s}}_n$; on a

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = \overline{s}_n + \overline{\overline{s}}_n.$$

Passant dans cette égalité à la limite lorsque $n \to \infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\overline{s}_n + \overline{\overline{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{s}_n + \lim_{n\to\infty} \overline{\overline{s}}_n = \overline{s} + \overline{\overline{s}}.$$

Ainsi, la série (7) converge et elle a pour somme $\overline{s} + \overline{\overline{s}}$.

On démontre d'une manière analogue que la série (8) converge aussi et qu'elle a pour somme $\overline{s} - \overline{\overline{s}}$.

On dit que les séries (7) et (8) ont été obtenues en ajoutant ou soustrayant terme à terme les séries (5) et (6).

§ 2. Condition nécessaire de convergence d'une série

Lorsqu'on étudie une série, l'une des questions fondamentales est celle de la convergence ou de la divergence de cette série. Nous établirons plus bas des critères suffisants qui résolvent cette question. Nous nous proposons maintenant d'établir un critère nécessaire de convergence.

Théorème. *Si une série converge, son terme général u_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration. Supposons que la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge, c'est-à-dire que l'on ait l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

où s est la somme de la série (un nombre fini fixe) ; mais on a alors également l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s,$$

car n et $(n - 1)$ tendent vers l'infini en même temps. Retranchons terme à terme la seconde égalité de la première, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Or,

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

c.q.f.d.

Corollaire. *Si le terme général u_n d'une série ne tend pas vers zéro lorsque $n \to \infty$, la série diverge.*

Exemple. La série

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

diverge, car

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Soulignons que le critère examiné donne une condition nécessaire, mais non suffisante, c'est-à-dire *qu'une série peut très bien diverger bien que son n-ième terme tende vers zéro.*

Ainsi, la série suivante, dite *série harmonique*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

diverge bien que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Pour le démontrer, recopions un plus grand nombre de termes de la série harmonique :

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\ldots \qquad (1)$$

Ecrivons encore la série auxiliaire

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$

$$+\overbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+$$

$$+\overbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}^{16\text{ termes}}+\ldots \qquad (2)$$

On construit la série (2) comme suit : son premier terme est égal à 1, le second à $\frac{1}{2}$, le troisième et le quatrième à $\frac{1}{4}$, les quatre sui-

vants sont égaux à $\frac{1}{8}$, les huit suivants à $\frac{1}{16}$, les 16 suivants à $\frac{1}{32}$, etc.

Désignons par $s_n^{(1)}$ la somme des n premiers termes de la série harmonique (1) et par $s_n^{(2)}$ la somme des n premiers termes de la série (2).

Comme chaque terme de la série (1) est plus grand que le terme correspondant de la série (2) ou lui est égal, on a pour $n > 2$

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)}. \tag{3}$$

Calculons les sommes partielles de la série (2) pour les valeurs de n égales à 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ termes}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ termes}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ termes}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ termes}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ termes}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2};$$

on calcule de la même manière $s_{2^6} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$, $s_{2^7} = 1 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ et, en général, $s_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$.

Par conséquent, les sommes partielles de la série (2) peuvent être supérieures à tout nombre positif en prenant k suffisamment grand, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

mais il résulte alors de la relation (3) que

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(1)} = \infty,$$

c'est-à-dire que la série harmonique (1) diverge.

§ 3. Comparaison des séries à termes positifs

Soient deux séries à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

Nous avons les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Si les termes de la série* (1) *ne sont pas supérieurs aux termes correspondants de la série* (2), *c'est-à-dire que*

$$u_n \leqslant v_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

et si (2) *converge, la série* (1) *converge aussi.*

Démonstration. Désignons par s_n et σ_n les sommes partielles de la première et de la deuxième série:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Il résulte de la condition (3) que

$$s_n \leqslant \sigma_n. \tag{4}$$

Comme la série (2) converge, ses sommes partielles ont des limites

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Les termes des séries (1) et (2) étant positifs, on a $\sigma_n < \sigma$, et, en vertu de l'inégalité (4),

$$s_n < \sigma.$$

Ainsi, nous avons démontré que les sommes partielles s_n sont bornées. Notons que, lorsque n croît, la somme partielle s_n croît, et il résulte du fait que la suite des sommes partielles est bornée et croît qu'elle a une limite *)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

et, évidemment,

$$s \leqslant \sigma.$$

Le théorème 1 permet de se prononcer sur la nature de certaines séries.

---

*) Pour se convaincre que la variable s_n a une limite, rappelons-nous un critère d'existence de la limite d'une suite (voir théorème 7, § 5, chap II, t.I): « une variable bornée et croissante a une limite ». Dans notre cas, la suite des sommes s_n est bornée et croît, donc elle a une limite, la série converge.

Exemple 1. La série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

converge, étant donné que ses termes sont plus petits que les termes correspondants de la série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

qui est une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ à partir du deuxième terme. Sa somme est $1\frac{1}{2}$. En vertu du théorème 1, la série proposée converge donc, et sa somme est plus petite que $1\frac{1}{2}$.

Théorème 2. *Si les termes de la série* (1) *ne sont pas inférieurs aux termes correspondants de la série* (2), *c'est-à-dire que si*

$$u_n \geqslant v_n, \tag{5}$$

et si la série (2) *diverge, la série* (1) *diverge également.*

Démonstration. Il résulte de la condition (5) que

$$s_n \geqslant \sigma_n. \tag{6}$$

Comme les termes de la série (2) sont positifs, sa somme partielle σ_n croît avec n, et comme elle diverge,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Mais alors, en vertu de l'inégalité (6),

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

la série (1) diverge.

Exemple 2. La série

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

diverge, car, à partir du second, ses termes sont supérieurs aux termes correspondants de la série harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

dont on sait qu'elle diverge.

Remarque 1. Les deux critères que l'on vient de donner (théorèmes 1 et 2) ne sont légitimes que pour les séries à termes positifs. Ils restent en vigueur lorsqu'il manque plusieurs termes

dans l'une ou l'autre série. Toutefois, ces critères ne sont plus vrais si l'une quelconque des séries possède des termes négatifs.

Remarque 2. Les théorèmes 1 et 2 sont également vrais lorsque les inégalités (3) ou (6) commencent à être vérifiées seulement pour $n \geqslant N$ et non pas pour tous les $n = 1, 2, 3, \ldots$

§ 4. Règle de d'Alembert

Théorème (règle de d'Alembert). *Si dans une série à termes positifs*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a une limite finie* l *lorsque* $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{2}$$

1) *la série converge lorsque* $l < 1$,
2) *la série diverge lorsque* $l > 1$
(si $l = 1$, on ne peut rien dire).

Démonstration. 1) Soit $l < 1$. Considérons le nombre q tel que $l < q < 1$ (fig. 358).

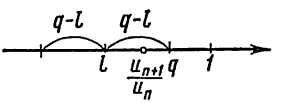


Fig. 358

Il résulte de la définition des limites et de la relation (2) que l'on a pour tous les n à partir d'un certain numéro N, c'est-à-dire pour $n \geqslant N$, l'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q. \tag{2'}$$

En effet, comme la quantité $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers la limite l, on peut rendre la différence entre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le nombre l (à partir d'un certain N) inférieure en valeur absolue à tout nombre positif, en particulier à $q - l$, c'est-à-dire que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < q - l.$$

Cette dernière inégalité entraîne (2'). Ecrivons cette inégalité pour divers n à partir de N:

$$\left.\begin{array}{l} u_{N+1} < qu_N, \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2u_N, \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3u_N, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Considérons à présent les deux séries

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \qquad (1)$$

$$u_N + qu_N + q^2u_N + \dots \qquad (1')$$

(1') est une progression géométrique de raison positive $q < 1$. Donc elle converge. Les termes de la série (1) sont, à partir de u_{N+1},

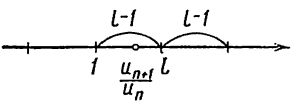


Fig. 359

inférieurs aux termes de la série (1'). Il résulte du théorème 1, § 3 et du théorème 1, § 1 que la série (1) converge.

2) Soit $l > 1$.

Il résulte de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $(l > 1)$ que, à partir d'un certain numéro N, c'est-à-dire pour $n \geqslant N$, on a l'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

(fig. 359) ou $u_{n+1} > u_n$ pour tous les $n \geqslant N$. Mais cela veut dire que les termes de la série croissent à partir de l'indice $N + 1$, donc le terme général ne tend pas vers zéro. La série diverge.

Remarque 1. La série diverge également dans le cas où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. En effet, si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, on a, à partir d'un certain numéro $n = N$, l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ou encore $u_{n+1} > u_n$.

Exemple 1. Etudier la nature de la série

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n} + \dots$$

Solution. On a

$$u_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!}; \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n\,(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

La série converge.

Exemple 2. Etudier la nature de la série

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$$

Solution. On a ici

$$u_n=\frac{2^n}{n}\ ;\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}\ ;\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=2\frac{n}{n+1}\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2>1.$$

La série diverge, d'ailleurs son terme général u_n tend vers l'infini.

Remarque 2. La règle de d'Alembert permet de voir si une série positive converge seulement dans le cas où $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est différente de 1. Si cette limite n'existe pas ou si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure que la série converge ou qu'elle diverge, car elle peut alors aussi bien converger que diverger.

Pour déterminer la nature d'une telle série, on aura recours à un autre critère.

Remarque 3. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ et que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit plus grand que l'unité pour des n suffisamment grands, la série diverge. En effet, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, alors $u_{n+1}>u_n$ et le terme général ne tend pas vers zéro lorsque $n\to\infty$.

Illustrons ce qui a été dit par des exemples.

Exemple 3. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

Solution. On a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

La série diverge, car $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tous les n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Exemple 4. Appliquons la règle de d'Alembert à la série harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

On a $u_n = \frac{1}{n}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ et, par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Par conséquent, la règle de d'Alembert ne permet de rien dire sur la convergence ou la divergence de la série harmonique. Mais on a établi autrement que cette série diverge.

Exemple 5. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Solution. On a

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

La règle de d'Alembert ne donne rien. Mais on peut démontrer que cette série converge par d'autres considérations. En effet,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

et l'on peut recopier la série donnée sous la forme

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

Réduisant les termes semblables, on obtient l'expression de la somme partielle s_n :

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

La série converge et sa somme est égale à 1.

§ 5. Règle de Cauchy

Théorème (règle de Cauchy). *Etant donnée la série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

à termes positifs, si la quantité $\sqrt[n]{u_n}$ *a une limite finie* l *lorsque* $n \to \infty$, *c'est-à-dire si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

1) *la série converge si* $l < 1$
2) *la série diverge si* $l > 1$.

Démonstration. 1) Soit $l < 1$. Soit q un nombre tel que $l < q < 1$.

On aura à partir d'un certain $n = N$

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < q - l;$$

il en résulte que

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

ou bien

$$u_n < q^n$$

pour tous les $n \geqslant N$.

Considérons à présent les deux séries:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \tag{1}$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots. \tag{1'}$$

La série (1′) converge, car ses termes forment une progression géométrique décroissante. Les termes de la série (1) sont, à partir de u_N, inférieurs aux termes respectifs de (1′). Donc la série (1) converge.

2) Supposons $l > 1$. On aura à partir d'un certain $n = N$

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

ou bien

$$u_n > 1.$$

La série diverge évidemment.

Exemple. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Solution. Appliquons la règle de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

La série converge.

R e m a r q u e. Comme pour la règle de d'Alembert, le cas où

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

exige une étude particulière. La série peut alors aussi bien converger que diverger. Ainsi, pour la série harmonique (qui, comme on le sait, diverge)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pour s'en assurer, montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$. En effet,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\operatorname{Log} n}{n}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fraction tendent vers l'infini. Appliquons la règle de L'Hospital :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\operatorname{Log} n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{n} = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 0$, mais alors $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Il en est de même de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Mais cette série converge, car, à partir du second, ses termes sont inférieurs à ceux de la série convergente

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

(voir exemple 5, § 4).

§ 6. Comparaison avec une intégrale

T h é o r è m e. *Soit la série à termes positifs non croissants*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

c'est-à-dire

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots, \tag{1'}$$

et soit $f(x)$ *une fonction continue non croissante telle que*

$$f(1) = u_1; \quad f(2) = u_2; \quad \ldots; \quad f(n) = u_n. \tag{2}$$

On peut alors affirmer que:

1) *si l'intégrale*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

converge (voir § 7, chap. XI, t. I), *la série* (1) *converge également*;

2) *si l'intégrale diverge, la série* (1) *diverge.*

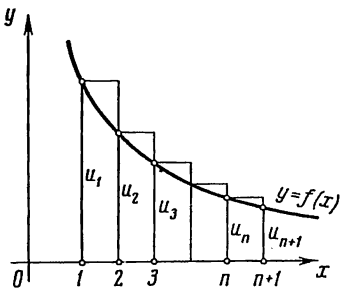


Fig. 360

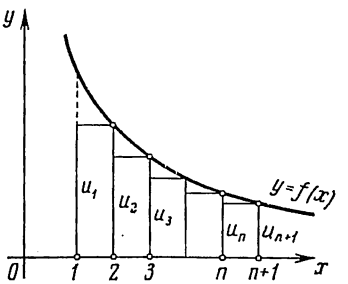


Fig. 361

Démonstration. Représentons les termes de la série géométriquement, en reportant sur l'axe des abscisses les numéros des termes $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ et verticalement leurs valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ (fig. 360).

Construisons sur la même figure le graphique de la fonction non croissante

$$y = f(x)$$

satisfaisant à la condition (2).

On remarque sur la figure 360 que le premier rectangle construit a pour base 1 et pour hauteur $f(1) = u_1$. L'aire de ce rectangle est donc u_1. L'aire du second rectangle est u_2, etc., et l'aire du n-ième et dernier rectangle construit est u_n. La somme des aires des rectangles construits est égale à la somme s_n des n premiers termes de la série. Par ailleurs, la figure en escalier formée par ces rectangles contient le domaine limité par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = 1, x = n+1, y = 0$; l'aire de ce domaine est égale à $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$.

Par conséquent,

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Considérons maintenant la figure 361. Ici, le premier rectangle construit a pour hauteur u_2 et son aire est aussi u_2. L'aire du second rectangle est u_3, etc. L'aire du dernier rectangle construit est u_{n+1}. Par conséquent, l'aire de tous les rectangles construits est égale à la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série moins le premier, soit $s_{n+1} - u_1$. Par ailleurs, comme il est facile de le voir, la figure en escalier formée par ces rectangles est comprise dans le trapèze curviligne formé par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = 1$, $x = n+1$, $y = 0$. L'aire de ce trapèze curviligne est égale à $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$. Donc

$$s_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

d'où

$$s_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1. \tag{4}$$

Considérons maintenant les deux cas.

1. Supposons que l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, c'est-à-dire qu'elle ait une valeur finie.

Comme

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

on a, en vertu de l'inégalité (4),

$$s_n < s_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)\,dx + u_1,$$

c'est-à-dire que la somme partielle s_n est limitée quel que soit n. Or, elle croît avec n, car tous les u_n sont positifs. Donc s_n a une limite finie lorsque $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

la série converge.

2. Supposons ensuite que $\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$. Cela veut dire que $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ croît indéfiniment avec n. Mais alors, en vertu de l'inégalité (3), s_n croît aussi indéfiniment avec n, c'est-à-dire que la série diverge.

Le théorème est donc complètement démontré.

Remarque. Le théorème reste aussi légitime si les inégalités (1′) sont vérifiées seulement à partir d'un certain N.

Exemple. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

Solution. Comparons avec l'intégrale de la fonction

$$f(x)=\frac{1}{x^p},$$

qui satisfait à toutes les conditions du théorème. Considérons l'intégrale

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_1^N=\dfrac{1}{1-p}\,(N^{1-p}-1) \text{ pour } p\neq 1.\\ \operatorname{Log} x\Big|_1^N=\operatorname{Log} N \text{ pour } p=1.\end{cases}$$

Faisons tendre N vers l'infini et étudions la convergence de l'intégrale selon les cas.

On pourra alors juger de la convergence de la série selon les valeurs de p.

Si $p>1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$, l'intégrale est finie, donc la série converge;

si $p<1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\infty$, l'intégrale est infinie, la série diverge;

si $p=1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\infty$, l'intégrale est infinie, la série diverge.

Remarquons que ni la règle de d'Alembert ni celle de Cauchy ne résolvent la question de la convergence de cette série. En effet,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p=1^p=1.$$

§ 7. Séries alternées. Théorème de Leibniz

Nous avons considéré jusqu'à présent des séries à termes positifs. Nous allons considérer dans ce paragraphe des séries dont les signes des termes sont alternés, c'est-à-dire des séries de la forme

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont positifs.

Théorème de Leibniz. *Si dans une série alternée*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \ (u_n > 0), \tag{1}$$

les termes vont en décroissant

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \tag{2}$$

et si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{3}$$

la série (1) *converge, sa somme est positive et n'est pas supérieure au premier terme.*

Démonstration. Considérons la somme des $n = 2m$ premiers termes de la série (1):

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Il résulte de la condition (2) que les expressions entre parenthèses sont positives. Donc la somme s_{2m} est positive

$$s_{2m} > 0$$

et croît avec m.

Recopions maintenant cette somme sous la forme

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots$$
$$\ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

En vertu de la condition (2), chaque expression entre parenthèses est positive, donc, retranchant toutes les expressions entre parenthèses de u_1, on obtient un nombre inférieur à u_1, c'est-à-dire que

$$s_{2m} < u_1.$$

Par conséquent, nous avons établi que s_{2m} croît avec m et est bornée supérieurement. Il en résulte que s_{2m} a une limite s:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s,$$

et

$$0 < s < u_1.$$

Toutefois, nous n'avons pas démontré encore que la série converge; nous avons démontré seulement que la suite des sommes partielles paires a une limite s. Démontrons maintenant que les sommes partielles impaires tendent aussi vers s.

Considérons, à cet effet, la somme des $n = 2m + 1$ premiers termes de la série (1):

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Comme, d'après la condition (3), $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, on a

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Par là même, nous avons démontré que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ aussi bien pour n pair que pour n impair. Donc la série (1) converge.

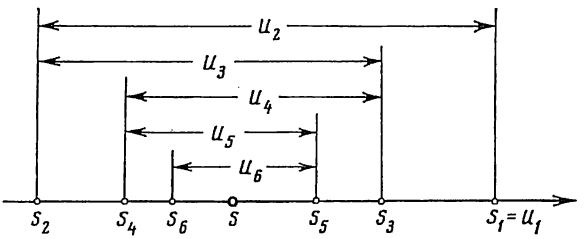


Fig. 362

Remarque 1. Le théorème de Leibniz est légitime si les inégalités (2) sont vraies à partir d'un certain N.

Remarque 2. Le théorème de Leibniz peut être illustré géométriquement comme suit. Reportons sur l'axe numérique les sommes partielles (fig. 362):

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2, \quad s_3 = s_2 + u_3,$$
$$s_4 = s_3 - u_4, \quad s_5 = s_4 + u_5,$$

et ainsi de suite.

Les points représentant les sommes partielles tendent vers un point s qui représente la somme de la série. Les sommes partielles paires se trouvent à gauche de s, les sommes partielles impaires à droite de s.

Remarque 3. Si une série alternée satisfait à la condition du théorème de Leibniz, il n'est pas difficile d'évaluer l'erreur commise lorsqu'on remplace sa somme s par une somme partielle s_n. Ceci revient à négliger tous les termes à partir de u_{n+1}. Mais ces termes forment une série alternée dont la somme est, en valeur

absolue, inférieure au premier terme négligé (u_{n+1}). Par conséquent, l'erreur commise lorsqu'on remplace s par s_n ne dépasse pas en valeur absolue le premier terme négligé.

Exemple 1. La série harmonique alternée

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

converge, car

$$1)\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

La somme des n premiers termes de cette série

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

se distingue de la somme s de la série par une quantité inférieure à $\frac{1}{n+1}$.

Exemple 2. La série

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$$

converge en vertu du théorème de Leibniz.

§ 8. Séries à termes de signes quelconques. Convergence absolue et semi-convergence

Une série est dite à termes de signes quelconques si l'on trouve parmi ses termes des termes aussi bien positifs que négatifs.

Les séries alternées du paragraphe précédent sont, évidemment, un cas particulier des séries à termes de signes quelconques.

Nous allons examiner quelques propriétés des séries à termes de signes quelconques.

Contrairement à la convention adoptée au paragraphe précédent, nous admettrons dorénavant que les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ peuvent être aussi bien négatifs que positifs.

Donnons, en premier lieu, un important critère suffisant de convergence des séries à termes de signes quelconques.

Théorème 1. *Si la série à termes de signes quelconques*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

est telle que la série formée avec les valeurs absolues de ses termes

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2}$$

converge, la série proposée converge aussi.

Démonstration. Soient s_n et σ_n les sommes des n premiers termes des séries (1) et (2).

Soient encore s'_n la somme de tous les termes positifs et s''_n la somme des valeurs absolues de tous les termes négatifs contenus dans les n premiers termes de la série proposée:

$$s_n = s'_n - s''_n; \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Par hypothèse, σ_n a pour limite σ; s'_n et s''_n sont des quantités positives croissantes inférieures à σ. Elles ont donc des limites s' et s''. Il résulte de la relation $s_n = s'_n - s''_n$ que s_n aussi a une limite qui est égale à $s' - s''$, c'est-à-dire que la série à termes de signes quelconques (1) converge.

Le théorème démontré permet de juger de la convergence de certaines séries à termes de signes variables. L'étude de la question de la convergence d'une telle série se ramène alors à l'étude d'une série à termes positifs.

Considérons deux exemples.

Exemple 1. Etudier la convergence de la série

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots, \tag{3}$$

où α est un nombre quelconque.

Solution. Considérons parallèlement à la série proposée les séries

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots \tag{4}$$

et

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

La série (5) converge (voir § 6). Les termes de la série (4) ne sont pas supérieurs aux termes de la série (5); donc (4) converge aussi. Il résulte du théorème démontré que la série proposée (3) converge aussi.

Exemple 2. Etudier la convergence de la série

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^3} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n} + \ldots \tag{6}$$

Solution. Considérons en même temps que la série proposée la série

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{7}$$

Cette série converge, car c'est une progression géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Il en résulte la convergence de la série donnée (6), car ses termes sont inférieurs en valeurs absolues aux termes de la série (7).

Notons que le critère de convergence démontré ci-dessus est simplement suffisant pour qu'une série à termes quelconques converge, mais non nécessaire : il existe des séries à termes de signes variables qui convergent, mais dont les séries des valeurs absolues divergent. Dès lors, il est utile d'introduire les notions de convergence absolue et de semi-convergence pour les séries à termes quelconques et de classer ainsi ces séries.

Définition. La série à termes de signes variables

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

est dite *absolument convergente* si la série formée avec les valeurs absolues de ses termes

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2}$$

converge.

Si la série (1) converge, mais si la série (2) diverge, la série proposée (1) est dite *semi-convergente* ou *non absolument convergente*.

Exemple 3. La série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

est *semi-convergente*, car la série des valeurs absolues est la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

qui diverge. La série harmonique alternée converge, comme il résulte du critère de Leibniz.

Exemple 4. La série

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

est absolument convergente, étant donné que la série des valeurs absolues

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

converge, comme il a été établi au § 4.

Utilisant la notion de convergence absolue, on formule souvent le théorème 1 comme suit : *une série absolument convergente est convergente*.

Indiquons pour terminer (sans démonstration) les propriétés suivantes des séries absolument convergentes et semi-convergentes.

Théorème 2. *Si une série converge absolument, elle converge absolument lorsqu'on change arbitrairement l'ordre de ses termes. La somme d'une telle série ne dépend pas de l'ordre de ses termes.*

Cette propriété n'est pas conservée pour les séries semi-convergentes.

Théorème 3. *Si une série est semi-convergente, on peut regrouper ses termes de façon que la somme de la nouvelle série obtenue soit égale à un nombre A donné à l'avance. En outre, on peut regrouper les termes d'une série semi-convergente de façon que la nouvelle série soit divergente.*

La démonstration de ces théorèmes sort du cadre de ce cours.

Pour illustrer le fait qu'on peut regrouper les termes d'une série semi-convergente de manière à modifier sa somme, considérons l'exemple suivant.

Exemple 5. La série alternée

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{8}$$

ne converge pas absolument. Soit s sa somme. On a, évidemment, $s>0$. Regroupons les termes de (8) de sorte qu'un terme positif soit suivi de deux termes négatifs:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\ldots \tag{9}$$

Montrons que la série obtenue converge, mais que sa somme s' est deux fois plus petite que la somme de la série (8), c'est-à-dire qu'elle est égale à $\frac{1}{2}s$. Soient s_n et s'_n les sommes partielles des séries (8) et (9). Considérons la somme des $3k$ termes de la série (9):

$$\begin{aligned}
s'_{3k}&=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{1}{2}s.$$

Puis

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}s,$$

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}s.$$

On obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} s'_n=s'=\frac{1}{2}s.$$

On voit que la somme de la série a changé après regroupement de ses termes (elle a diminué de moitié).

§ 9. Séries de fonctions

On appelle *série de fonctions* toute série dans laquelle le terme général est une fonction d'une variable x.

Considérons la série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Donnant à x différentes valeurs numériques, on obtient différentes séries numériques qui peuvent aussi bien converger que diverger.

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série de fonctions converge est appelé le *domaine de convergence* de cette série.

Il est évident que, dans le domaine de convergence d'une série de fonctions, sa somme est une certaine fonction de x. C'est pourquoi on la désigne par $s(x)$.

Exemple. Considérons la série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Cette série converge pour tous les x dans l'intervalle $(-1, 1)$, c'est-à-dire pour tous les x satisfaisant à la condition $|x| < 1$. Pour toute valeur de x de cet intervalle, la somme de la série est égale à $\frac{1}{1-x}$ (la somme d'une progression géométrique décroissante de raison x). Par conséquent, la série proposée définit dans l'intervalle $(-1, 1)$ la fonction

$$s(x) = \frac{1}{1-x}$$

que représente la somme de la série, c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Désignons par $s_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série (1). Si cette série converge et si sa somme est $s(x)$, alors

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

où $r_n(x)$ est le *reste* de la série (1) :

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + n_{n+2}(x) + \ldots$$

Nous avons pour tous les x de l'intervalle de convergence $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, donc

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [s(x) - s_n(x)] = 0,$$

ce qui montre que le reste $r_n(x)$ d'une série convergente tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

§ 10. Séries majorables

Définition. La série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

est dite *majorable* dans un certain domaine de variation de x s'il existe une série numérique convergente à termes positifs

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots \tag{2}$$

telle que l'on ait pour tous les x du domaine envisagé

$$|u_1(x)| \leqslant \alpha_1, \quad |u_2(x)| \leqslant \alpha_2, \ \ldots, \quad |u_n(x)| \leqslant \alpha_n, \ \ldots \tag{3}$$

En d'autres termes, une série est *majorable* si chacun de ses termes n'est pas supérieur en valeur absolue au terme correspondant d'une série numérique convergente à termes positifs.

Ainsi, la série

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

est majorable sur tout l'axe Ox. En effet, on a pour toutes les valeurs de x la relation

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

et on sait que la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

converge.

Il résulte immédiatement de la définition qu'une série majorable dans un certain domaine est absolument convergente en tous les points de ce domaine (voir § 8). En outre, une série majorable jouit de l'importante propriété suivante.

Théorème. *Supposons que la série de fonctions*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

soit majorable sur le segment $[a, b]$. *Soient* $s(x)$ *la somme de cette série,* $s_n(x)$ *la somme de ses* n *premiers termes. Alors, il correspond à tout* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit un nombre positif* N *tel que pour tous les* $n \geqslant N$

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

quel que soit x *sur le segment* $[a, b]$.

Démonstration. Désignons par σ la somme de la série (2) :

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots,$$

on a

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,$$

où σ_n est la somme des n premiers termes de (2) et ε_n le reste de cette série :

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots$$

Comme cette série converge, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Mettons, à présent, la somme de la série de fonctions (1) sous la forme

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

où

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$
$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots$$

Il résulte de la condition (3) que

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leqslant \alpha_{n+2}, \ldots$$

et donc

$$|r_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$$

pour tous les x du domaine considéré.

Ainsi,

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$$

pour tous les x du segment $[a, b]$ et $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque 1. Le résultat obtenu peut être illustré géométriquement comme suit.

Considérons le graphique de la fonction $y = s(x)$. Construisons une bande de largeur $2\varepsilon_n$ à cheval sur cette courbe, c'est-à-dire construisons les courbes $y = s(x) + \varepsilon_n$ et $y = s(x) - \varepsilon_n$ (fig. 363). Dans ces conditions, quel que soit ε_n, le graphique de la fonction $s_n(x)$ sera contenu tout entier dans cette bande qui contiendra également les graphiques de toutes les sommes partielles suivantes.

Remarque 2. Une série de fonctions arbitraire convergeant sur le segment $[a, b]$ ne jouit pas forcément de la propriété démontrée dans le théorème. Mais il existe des séries non majorables jouissant de ladite propriété. Toute série jouissant de cette propriété est dite *uniformément convergente sur le segment* $[a, b]$.

Ainsi, *la série de fonctions* $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ *est dite uniformément convergente sur le segment* $[a, b]$ *s'il correspond*

à tout $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit un nombre* N *tel que, pour tous les* $n \geqslant N$, *l'on ait*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

quel que soit x *sur le segment* $[a, b]$.

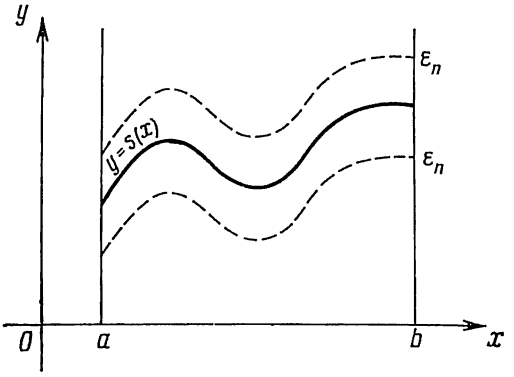


Fig. 363

Il résulte du théorème démontré qu'une série majorable est uniformément convergente.

§ 11. Continuité de la somme d'une série

Soit une série de fonctions continues

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

convergente sur un segment $[a, b]$.

Nous avons démontré au chapitre II (t. I) un théorème sur la continuité de la somme d'un nombre fini de fonctions continues. Cette propriété n'est plus conservée pour la somme d'une série (qui contient une infinité de termes). Certaines séries de fonctions continues ont pour somme une fonction continue, d'autres séries de fonctions continues ont pour somme des fonctions discontinues.

Exemple. Considérons la série

$$(x^{\frac{1}{3}} - x) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \ldots + (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) + \ldots$$

Les termes de cette série (figurant entre parenthèses) sont des fonctions continues quel que soit x. Montrons que cette série converge et que sa somme est une fonction discontinue.

Trouvons la somme des n premiers termes de cette série

$$s_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Calculons la somme de la série :

si $x > 0$,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x,$$

si $x < 0$,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x) = -1 - x,$$

si $x = 0$, on a $s_n = 0$, donc $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} s(x) &= -1 - x && \text{pour } x < 0, \\ s(x) &= 0 && \text{pour } x = 0, \\ s(x) &= 1 - x && \text{pour } x > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la somme de la série envisagée est une fonction discontinue. Nous avons représenté son graphique sur la fig. 364, ainsi que ceux des sommes partielles $s_1(x)$, $s_2(x)$ et $s_3(x)$.

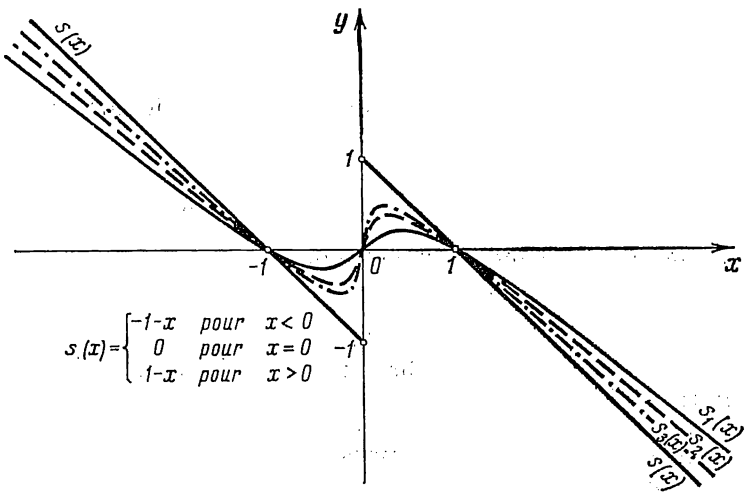


Fig. 364

Le théorème suivant concerne les séries majorables.

Théorème. *La somme d'une série de fonctions continues majorable sur le segment* $[a, b]$ *est une fonction continue sur ce segment.*

Démonstration. Considérons la série de fonctions continues majorable sur le segment $[a, b]$

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \tag{1}$$

Ecrivons sa somme sous la forme

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

où

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

et

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Prenons sur le segment $[a, b]$ un x arbitraire et donnons-lui un accroissement Δx tel que $x + \Delta x$ appartienne à $[a, b]$.

Introduisons les notations

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x);$$
$$\Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x);$$

alors

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

d'où

$$|\Delta s| \leqslant |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \tag{2}$$

Cette inégalité est vraie pour tout n.

Pour démontrer la continuité de $s(x)$, il faut démontrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit donné à l'avance, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous les $|\Delta x| < \delta$, l'on ait $|\Delta s| < \varepsilon$.

Comme la série proposée (1) est majorable, il correspond à tout $\varepsilon > 0$ un N (pour tous les $n \geqslant N$ et, en particulier, pour $n = N$) tel que

$$|r_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3}$$

quel que soit x sur le segment $[a, b]$. Le nombre $x + \Delta x$ appartient au segment $[a, b]$, donc

$$|r_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3'}$$

Par ailleurs, pour le N choisi, la somme partielle $s_N(x)$ est une fonction continue (la somme d'un nombre f i n i de fonctions continues), et, par conséquent, on peut choisir δ positif tel que, pour tout Δx satisfaisant à la condition $|\Delta x| < \delta$, l'on ait

$$|\Delta s_N| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Il résulte des inégalités (2), (3), (3′), (4)

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|\Delta s| < \varepsilon \text{ pourvu que } |\Delta x| < \delta,$$

ce qui prouve que $s(x)$ est une fonction continue au point x (et donc en tout point du segment $[a, b]$).

Remarque. Il résulte du théorème démontré que si la somme d'une série est discontinue sur un segment donné $[a, b]$, la série ne peut être majorée sur ce segment. Ainsi, la série étudiée dans l'exemple ne peut pas être majorée sur tout segment contenant le point $x = 0$ en lequel la somme de la série est discontinue.

Notons, enfin, que la réciproque n'est pas vraie : il existe des séries non majorables sur un segment mais qui convergent sur ce segment vers une fonction continue. Notamment, toute série uniformément convergente sur le segment $[a, b]$ (même si elle n'est pas majorable) a pour somme une fonction continue (si, bien entendu, tous ses termes sont continus).

§ 12. Intégration et dérivation des séries

Théorème 1. *Soit la série de fonctions continues*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

majorable sur le segment $[a, b]$ *et soit* $s(x)$ *sa somme. L'intégrale de* $s(x)$ *entre* α *et* x, *appartenant à* $[a, b]$, *est égale à la somme des intégrales des termes de la série entre les mêmes bornes* :

$$\int_\alpha^x s(t)\,dt = \int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \int_\alpha^x u_2(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt + \ldots$$

Démonstration. La fonction $s(x)$ peut être mise sous la forme

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

ou

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x).$$

On a

$$\int_\alpha^x s(t)\,dt = \int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \int_\alpha^x u_2(t)\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt + \int_\alpha^x r_n(t)\,dt \tag{2}$$

(l'intégrale d'une somme finie de termes est égale à la somme de leurs intégrales).

Comme la série proposée (1) est majorable, on a, quel que soit x, $|r_n(x)| < \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc

$$\left|\int_\alpha^x r_n(t)\,dt\right| \leqslant \pm \int_\alpha^x |r_n(t)|\,dt < \pm \int_\alpha^x \varepsilon_n\,dt =$$

$$= \pm\,\varepsilon_n(x-\alpha) \leqslant \varepsilon_n(b-a).$$

Les termes du second membre de l'égalité sont affectés du signe « + » lorsque $x > \alpha$ et du signe « — » lorsque $x < \alpha$. Comme $\varepsilon_n \to 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^x r_n(t)\,dt = 0.$$

Mais on déduit de (2)

$$\int_\alpha^x r_n(t)\,dt = \int_\alpha^x s(t)\,dt - \left[\int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt\right].$$

Par suite,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int_\alpha^x s(t)\,dt - \left[\int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt\right]\right\} = 0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt\right] = \int_\alpha^x s(t)\,dt. \tag{3}$$

La somme entre crochets est une somme partielle pour la série

$$\int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt + \ldots \tag{4}$$

Comme les sommes partielles de cette série ont une limite, cette série converge et sa somme est égale, en vertu de (3), à $\int_\alpha^x s(t)\,dt$, soit

$$\int_\alpha^x s(t)\,dt = \int_\alpha^x u_1(t)\,dt + \int_\alpha^x u_2(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,dt + \ldots$$

C'est l'égalité que nous nous proposions de démontrer.

Remarque 1. Si la série n'est pas majorable, il n'est pas toujours possible de l'intégrer terme à terme, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_\alpha^x s(t)\,dt$ de la somme de la série (1) n'est pas toujours égale à la somme des intégrales de ses termes (c'est-à-dire à la somme (4)).

Théorème 2. *Si la série*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{5}$$

de fonctions ayant des dérivées continues sur $[a, b]$ *converge sur ce segment vers la somme* $s(x)$ *et si la série*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \tag{6}$$

formée avec les dérivées de ses termes, est majorable sur ce segment, alors la somme de la série des dérivées est égale à la dérivée de la somme de la série proposée :

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

Démonstration. Désignons par $F(x)$ la somme de la série (6) :

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

et démontrons que

$$F(x) = s'(x).$$

Comme la série (6) est majorable, on a, en vertu du théorème précédent,

$$\int_\alpha^x F(t)\,dt = \int_\alpha^x u_1'(t)\,dt + \int_\alpha^x u_2'(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n'(t)\,dt + \ldots$$

On obtient en intégrant dans le second membre

$$\int_\alpha^x F(t)\,dt = [u_1(x) - u_1(\alpha)] +$$

$$+ [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots + [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \ldots$$

Mais

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$
$$s(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \ldots + u_n(\alpha) + \ldots,$$

quels que soient x et α sur le segment $[a, b]$. Par suite,

$$\int_\alpha^x F(t)\,dt = s(x) - s(\alpha).$$

On obtient en dérivant par rapport à x les deux membres de cette égalité

$$F(x) = s'(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré que les conditions du théorème étant satisfaites, la dérivée de la somme d'une série est égale à la somme des dérivées de ses termes.

Remarque 2. Il est très important que la série dérivée soit majorable, car si cette condition n'est pas observée, la dérivation terme à terme peut s'avérer impossible. Pour confirmer ce fait,

apportons un exemple de série majorable ne pouvant être dérivée terme. à terme.

Considérons la série

$$\frac{\sin 1^4 x}{1^2} + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \ldots$$

Cette série converge vers une fonction continue, car elle est majorable. En effet, quel que soit x, ses termes sont inférieurs en valeur absolue aux termes de la série numérique convergente

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Ecrivons la série formée avec les dérivées des termes de la série proposée :

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \ldots + n^2 \cos n^4 x + \ldots$$

Cette série diverge. Ainsi, lorsque $x = 0$, elle devient

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots$$

(On pourrait démontrer qu'elle diverge non seulement pour $x = 0$.)

§ 13. Séries entières ou séries de puissances. Intervalle de convergence

Définition 1. On appelle *série entière* ou *série de puissances* une série de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont des constantes données appelées *coefficients de la série*.

L'ensemble des points de convergence d'une série entière est un intervalle, pouvant se réduire à un point. Pour s'en assurer, démontrons d'abord le théorème suivant, fondamental dans la théorie des séries entières.

Théorème 1 (d'Abel). 1) *Si une série entière converge pour une certaine valeur de x_0 non nulle, elle converge absolument pour toute valeur de x telle que*

$$|x| < |x_0|;$$

2) *si la série diverge pour une certaine valeur de x_0', elle diverge pour tout x tel que*

$$|x| > |x_0'|.$$

Démonstration. 1) Comme, par hypothèse, la série numérique

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots \tag{2}$$

converge, son terme général $a_n x_0^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, ce qui prouve qu'il existe un nombre positif M tel que tous les termes de la série sont inférieurs en valeur absolue à M.

Recopions la série (1) sous la forme

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \qquad (3)$$

et considérons la série des valeurs absolues de ses termes:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (4)$$

Les termes de cette série sont inférieurs aux termes correspondants de la série

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (5)$$

Lorsque $|x| < |x_0|$, cette dernière série est une progression géométrique de raison $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, donc elle converge. Comme les termes de la série (4) sont inférieurs à ceux de (5), il en résulte que la série (4) converge aussi, ce qui signifie que la série (3) ou (1) converge absolument.

2) Il n'est guère difficile à présent de démontrer la deuxième partie du théorème: supposons que la série (1) diverge en un certain point x_0'. Alors elle divergera aussi en tout point x tel que $|x| > |x_0'|$. En effet, si elle convergeait en un certain point x satisfaisant à cette condition, en raison de la première partie du théorème, elle convergerait également au point x_0', car $|x_0'| < |x|$. Mais ceci est contraire à l'hypothèse que la série diverge au point x_0'. Donc la série diverge aussi au point x. Le théorème est complètement démontré.

Le théorème d'Abel permet de juger de la disposition des points de convergence et de divergence d'une série entière. En effet, si x_0 est un point de convergence, tous les points de l'intervalle $(-|x_0|, |x_0|)$ sont des points de convergence absolue. Si x_0' est un point de divergence, toute la demi-droite à droite de $|x_0'|$ et la demi-droite à gauche de $-|x_0'|$ sont constituées de points de divergence.

Ceci permet de conclure qu'il existe un nombre R tel que les points $|x| < R$ sont des points de convergence absolue et les points $|x| > R$ des points de divergence.

On a donc le théorème suivant sur la structure de l'ensemble des points de convergence d'une série entière:

Théorème 2. *L'ensemble des points de convergence d'une série entière est un intervalle centré sur l'origine des coordonnées.*

Définition 2. On appelle *intervalle de convergence* d'une série entière l'intervalle compris entre les points $-R$ et $+R$ tel que

la série converge, et même absolument, aux points x de cet intervalle et diverge aux points x qui lui sont extérieurs (fig. 365). Le nombre R est appelé le *rayon de convergence* de la série entière.

Aux extrémités de l'intervalle (c'est-à-dire aux points $x = R$ et $x = -R$) la question de la convergence ou de la divergence de la série proposée doit faire l'objet d'une étude spéciale.

Notons que pour certaines séries l'intervalle de convergence se réduit à un point ($R = 0$), et pour d'autres il s'étend sur tout l'axe Ox ($R = \infty$).

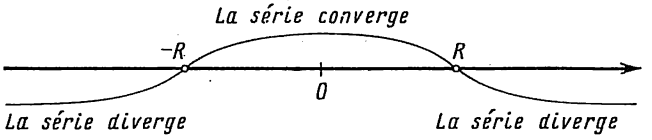


Fig. 365

Indiquons un moyen pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

et formons la série des valeurs absolues de ses termes:

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + |a_3|\,|x|^3 + \ldots$$
$$\ldots + |a_n|\,|x|^n + \ldots \tag{6}$$

Pour déterminer la convergence de cette dernière série (à termes positifs), appliquons la règle de d'Alembert.

Supposons qu'existe la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Alors, d'après la règle de d'Alembert, la série (6) converge lorsque $L|x| < 1$, c'est-à-dire pour $|x| < \frac{1}{L}$, et diverge lorsque $L|x| > 1$, c'est-à-dire pour $|x| > \frac{1}{L}$.

Par conséquent, la série (1) converge absolument pour $|x| < \frac{1}{L}$. Si $|x| \geqslant \frac{1}{L}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|L > 1$, et la série (6) diverge, son terme général ne tendant pas vers zéro *). Mais alors le terme

*) Rappelons que pendant la démonstration de la règle de d'Alembert (voir § 4) nous avons remarqué que si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, le terme général croissait, donc ne tendait pas vers zéro.

général de la série entière (1) ne tend pas non plus vers zéro, ce qui signifie, en raison du critère de convergence nécessaire, que cette série entière diverge $\left(\text{lorsque } |x| > \frac{1}{L}\right)$.

Il résulte de ce qui précède que l'intervalle $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ est l'intervalle de convergence de la série entière (1), c'est-à-dire que

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

D'une manière analogue, on peut aussi se servir de la règle de Cauchy pour déterminer l'intervalle de convergence d'une série entière. On obtient alors

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Exemple 1. Déterminer l'intervalle de convergence de la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Solution. On obtient en appliquant la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|.$$

Par conséquent, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$. La règle de d'Alembert ne donne rien sur les points frontières de l'intervalle $(-1, 1)$. Mais on voit directement que la série diverge aux points $x = \pm 1$.

Exemple 2. Déterminer l'intervalle de convergence de la série

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots$$

Solution. Appliquons la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(2x)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x|.$$

La série converge lorsque $|2x| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{2}$; elle converge au point $x = \frac{1}{2}$ et diverge au point $x = -\frac{1}{2}$.

Exemple 3. Déterminer l'intervalle de convergence de la série

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Solution. Appliquons la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Comme la limite ne dépend pas de x et qu'elle est plus petite que 1, la série converge quel que soit x.

Exemple 4. La série $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$ diverge quel que soit x, sauf $x = 0$, car $(nx)^n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, quel que soit x non nul.

Théorème 3. *Une série entière*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

est majorable sur tout segment $[-\rho, \rho]$ *entièrement contenu dans son intervalle de convergence.*

Démonstration. On a par hypothèse $\rho < R$ (fig. 366), et donc la série numérique (à termes positifs)

$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n \tag{7}$$

converge. Mais, lorsque $|x| < \rho$, les termes de la série (1) ne sont pas supérieurs en valeur absolue aux termes correspondants de (7). Donc la série (1) est majorable sur le segment $[-\rho, \rho]$.

Corollaire 1. *La somme d'une série entière est une fonction continue sur tout segment entièrement contenu dans l'intervalle de convergence.* En effet, la série est majorable sur ce segment et ses termes

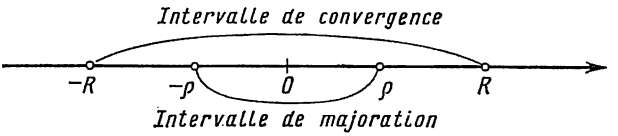


Fig. 366

sont des fonctions continues de x. Par conséquent, en vertu du théorème 1, § 11 la somme de cette série est une fonction continue.

Corollaire 2. *Si les bornes d'intégration* α, β *appartiennent à l'intervalle de convergence d'une série entière, l'intégrale de la somme*

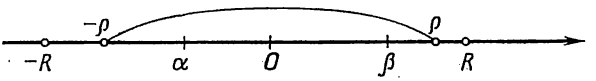


Fig. 367

de la série est égale à la somme des intégrales des termes de la série. En effet, l'intervalle d'intégration peut être contenu dans le segment $[-\rho, \rho]$, où la série est majorable (fig. 367) (voir le théorème 2, § 12 sur l'intégration des séries majorables).

§ 14. Dérivation des séries entières

Théorème 1. *Si* $(-R, R)$ *est l'intervalle de convergence de la série entière*

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{1}$$

la série

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

déduite de (1) *par dérivation terme à terme admet le même intervalle de convergence; on a en outre*

$$\varphi(x) = s'(x) \text{ lorsque } |x| < R,$$

c'est-à-dire que, dans l'intervalle de convergence, la dérivée de la somme de la série entière (1) *est égale à la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme la série* (1).

Démonstration. Démontrons que la série (2) est majorable sur tout segment $[-\rho, \rho]$, appartenant complètement à l'intervalle de convergence.

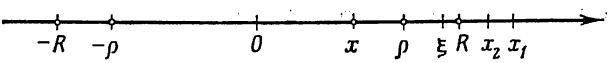


Fig. 368

Prenons un point ξ tel que $\rho < \xi < R$ (fig. 368). La série (1) converge en ce point, donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0$, et il existe une constante M telle que

$$|a_n\xi^n| < M \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

Si $|x| \leqslant \rho$, on a

$$|na_nx^{n-1}| \leqslant |na_n\rho^{n-1}| = n|a_n\xi^{n-1}|\left|\frac{\rho}{\xi}\right|^{n-1} < n\frac{M}{\xi}q^{n-1},$$

où

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1.$$

Ainsi, lorsque $|x| \leqslant \rho$, les termes de la série (2) sont inférieurs en valeur absolue aux termes de la série numérique positive à termes constants

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots).$$

Mais, comme le montre la règle de d'Alembert, cette dernière série converge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1.$$

Donc la série (2) est majorable sur le segment $[-\rho, \rho]$ et, en vertu du théorème (2), § 12, sa somme est la dérivée de la somme de la série proposée sur le segment $[-\rho, \rho]$, c'est-à-dire

$$\varphi(x) = s'(x).$$

Comme on peut enfermer tout point intérieur de l'intervalle $(-R, R)$ dans un certain segment $[-\rho, \rho]$, il en résulte que la série (2) converge en tout point intérieur de l'intervalle $(-R, R)$.

Montrons que la série (2) diverge en dehors de l'intervalle $(-R, R)$. Admettons que la série (2) converge pour $x_1 > R$. En l'intégrant terme à terme dans l'intervalle $(0, x_2)$, où $R < x_2 < x_1$, on obtiendrait que la série (1) converge au point x_2, ce qui contredit les conditions du théorème. Par conséquent, l'intervalle $(-R, R)$ est l'intervalle de convergence de la série (2). Le théorème est complètement démontré.

La série (2) peut être de nouveau dérivée terme à terme, et il sera loisible de continuer ce processus à volonté. De sorte que:

Théorème 2. *Si une série entière converge dans l'intervalle $(-R, R)$, sa somme représente une fonction ayant, dans l'intervalle de convergence, des dérivées de tout ordre n, chacune d'elles étant la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme n fois la série proposée; en outre, l'intervalle de convergence de chaque série obtenue par dérivation est aussi l'intervalle de convergence de la série proposée $(-R, R)$.*

§ 15. Séries de puissances de $x - a$

On appelle aussi *série de puissances* une série de la forme

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \quad (1)$$

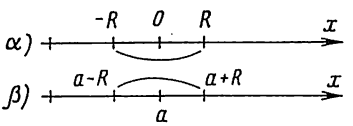


Fig. 369

où les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont également appelées les *coefficients de la série*. Les termes de cette série contiennent les puissances croissantes de $x - a$.

Si $a = 0$, on obtient une série des puissances de x, qui est donc un cas particulier de la série (1).

Pour déterminer le domaine de convergence de la série (1), faisons

le changement de variable

$$x - a = X.$$

La série (1) devient après cette substitution

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots, \qquad (2)$$

qui est une série des puissances de X.

Soit $-R < X < R$ l'intervalle de convergence de la série (2) (fig. 369, α). Il en résulte que la série (1) convergera pour les x vérifiant l'inégalité $-R < x - a < R$ ou $a - R < x < a + R$. Comme la série (2) diverge pour $|X| > R$, la série (1) divergera pour $|x - a| > R$, c'est-à-dire en dehors de l'intervalle $a - R < x < a + R$ (fig. 369, β).

Par conséquent, l'intervalle de convergence de la série (1) est l'intervalle $(a - R, a + R)$, ayant pour centre le point a. Toutes les propriétés d'une série entière en x dans l'intervalle de convergence $(-R, R)$ sont entièrement conservées pour une série entière de $x - a$ dans l'intervalle de convergence $(a - R, a + R)$. Ainsi, intégrant terme à terme la série entière (1), les bornes d'intégration

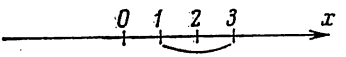


Fig. 370

appartenant à l'intervalle de convergence $(a - R, a + R)$, on obtient une série dont la somme est égale à l'intégrale de la somme de la série proposée (1). Si l'on dérive terme à terme la série entière (1), x étant pris dans l'intervalle de convergence $(a - R, a + R)$, on obtient une série dont la somme est égale à la dérivée de la somme de la série proposée (1).

E x e m p l e. Trouver le domaine de convergence de la série

$$(x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + \ldots + (x - 2)^n + \ldots.$$

S o l u t i o n. Posant $x - 2 = X$, on obtient la série

$$X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + \ldots$$

Cette série converge pour $-1 < X < +1$. Donc, la série proposée converge pour les x tels que $-1 < x - 2 < 1$, c'est-à-dire pour $1 < x < 3$ (fig. 370).

§ 16. Séries de Taylor et de Maclaurin

Nous avons montré au § 6, chap. IV (t. I) qu'une fonction $f(x)$ possédant des dérivées jusqu'au $(n + 1)$-ième ordre inclus au voisi-

nage du point $x = a$ (c'est-à-dire dans un intervalle contenant le point $x = a$) admettait dans ce voisinage le développement suivant la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \tag{1}$$

où le reste $R_n(x)$ était calculé selon la formule

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1.$$

Si la fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable au voisinage du point $x = a$, on pourra prendre n arbitrairement grand dans la formule de Taylor. Supposons que le reste R_n tende vers zéro dans le domaine considéré lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Ceci étant, faisant tendre $n \to \infty$ dans la formule (1), on obtient à droite une série avec une infinité de termes dite *série de Taylor* :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \tag{2}$$

Cette dernière égalité n'est juste que si $R_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Alors la série du second membre converge et sa somme est égale à la fonction $f(x)$. Montrons qu'il en est bien ainsi :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

où

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Comme, par hypothèse, $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, on a

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x).$$

Or, $P_n(x)$ est une somme partielle de la série (2) ; sa limite est égale à la somme de la série du second membre de l'égalité (2). L'égalité (2) est donc légitime :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Il résulte de ce qui précède que la série de Taylor représente la fonction donnée $f(x)$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, la série ne représente pas la fonction donnée, bien qu'elle puisse converger (vers une autre fonction).

Si, dans la série de Taylor, on pose $a = 0$, on obtient un cas particulier de cette série, appelée *série de Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \qquad (3)$$

Si l'on a écrit formellement la série de Taylor d'une fonction donnée et si l'on veut s'assurer qu'elle représente effectivement cette fonction, il faudra soit démontrer que le reste tend vers zéro, soit encore se convaincre, d'une manière ou d'une autre, que la série écrite converge vers la fonction donnée.

Notons que, pour chaque fonction élémentaire définie au § 8, chap. I (t. I), il existe un a et un R tels que, dans l'intervalle $(a - R, a + R)$, elle se développe en série de Taylor ou (si $a = 0$) de Maclaurin.

§ 17. Exemples de développement de fonctions en séries

1. Développement en série de Maclaurin de $f(x) = \sin x$.

Nous avons obtenu au § 7, chap. IV (t. I) la formule

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x).$$

Comme on a démontré que $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$, on obtient, compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe précédent, le développement de $\sin x$ en série de Maclaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (1)$$

Comme le reste tend vers zéro quel que soit x, la série proposée converge et sa somme représente la fonction $\sin x$ quel que soit x.

La figure 371 représente les graphiques de la fonction $\sin x$ et des trois premières sommes partielles de la série (1).

On a recours à cette série pour calculer $\sin x$ pour diverses valeurs de x.

Calculons, par exemple, $\sin 10°$ à 10^{-5} près. Etant donné que $10° = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$, on a

$$\sin 10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots$$

Nous bornant aux deux premiers termes, on obtient l'égalité approchée suivante :

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3;$$

l'erreur δ est, en valeur absolue, inférieure au premier terme négligé :

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0{,}2)^5 < 4\cdot 10^{-6}.$$

Si l'on calcule chaque terme de l'expression de $\sin\frac{\pi}{18}$ en prenant 6 décimales, on obtient

$$\sin\frac{\pi}{18} = 0{,}173647.$$

On peut garantir les quatre premières décimales.

2. Développement en série de Maclaurin de la fonction $f(x) = e^x$.

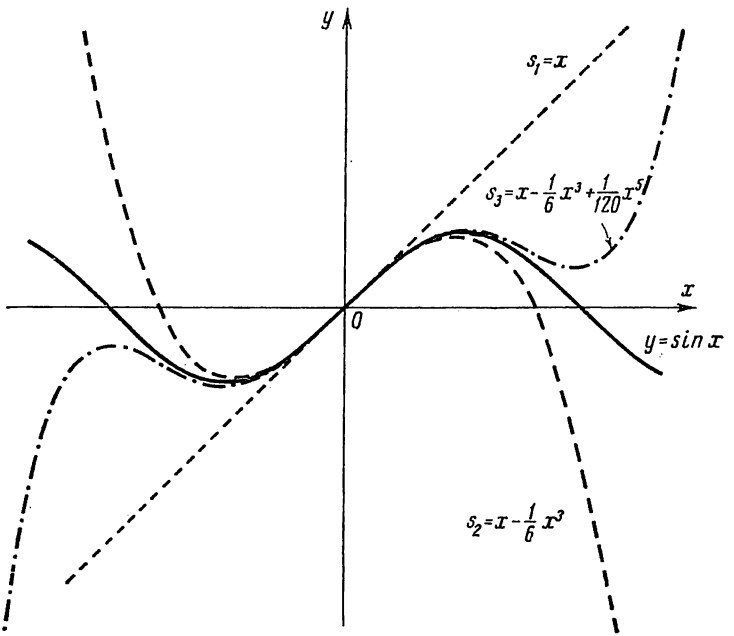


Fig. 371

Nous avons, compte tenu du § 7 du chap. IV (t. I):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{2}$$

car, comme on l'a démontré, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ quel que soit x. Donc, la série converge pour tous les x et représente la fonction e^x.

En remplaçant x par $(-x)$ dans le développement (2), on obtient:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{3}$$

3. Développement en série de Maclaurin de la fonction $f(x) = \cos x$.

On déduit de ce qui a été dit au § 7, chap. IV (t. I) que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \tag{4}$$

la série converge pour tous les x et représente la fonction $\cos x$.

4. Développement en série de Maclaurin des fonctions

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Des formules (2) et (3) il vient:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{5}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{6}$$

§ 18. Formule d'Euler

Jusqu'à présent, nous considérions des séries à termes réels et nous avons laissé en marge les séries à termes complexes. Nous ne donnerons pas une théorie complète des séries à termes complexes, qui sort du cadre de ce livre, nous bornant à examiner un exemple important.

Nous avons défini au chapitre VII (t. I) la fonction e^{x+iy} par l'égalité

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Faisant $x = 0$, on obtient la *formule d'Euler*:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Si l'on définit la fonction exponentielle e^{iy} à exposant imaginaire au moyen de la formule (2) du § 17, représentant la fonction e^x sous forme de série entière, on retrouve l'égalité d'Euler. En effet, définissons e^{iy} en posant dans l'égalité (2) du § 17 iy au lieu de x:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

Comme $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, etc., on obtient

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots$$

Séparons les parties réelle et imaginaire de cette série:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right).$$

Les expressions entre parenthèses sont les séries entières de $\cos y$ et de $\sin y$ (voir formules (3) et (1) du paragraphe précédent). Par conséquent,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{2}$$

Nous avons retrouvé la formule d'Euler.

§ 19. Formule générale du binôme

1. Développons en série de Maclaurin la fonction

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

m étant une constante arbitraire.

L'évaluation du reste présentant quelques difficultés, nous procéderons autrement pour trouver le développement en série de cette fonction.

Remarquant que la fonction $f(x) = (1 + x)^m$ satisfait à l'équation différentielle

$$(1 + x) f'(x) = mf(x) \tag{1}$$

et à la condition

$$f(0) = 1,$$

cherchons une série entière dont la somme $s(x)$ satisfasse à l'équation (1) et à la condition $s(0) = 1$:

$$s(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \text{*)}. \tag{2}$$

*) Nous avons pris le terme constant égal à l'unité, vu la condition $s(0) = 1$.

On obtient en substituant cette série dans l'équation (1):

$$(1 + x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots) =$$
$$= m(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots).$$

Identifiant les coefficients des mêmes puissances de x de part et d'autre de l'égalité, on trouve:

$$a_1 = m;\ a_1 + 2a_2 = ma_1;\ \ldots;\ na_n + (n+1)a_{n+1} = ma_n;\ \ldots$$

D'où l'on obtient pour les coefficients de la série l'expression

$$a_0 = 1;\quad a_1 = m;\quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2};$$
$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{1\cdot 2\ldots n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce sont les coefficients de la série du binôme.

On obtient en les substituant dans la formule (2):

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\ldots n}x^n + \ldots \qquad (3)$$

Si m est un entier positif, les coefficients de x^{m+1} et des puissances supérieures sont nuls et la série se réduit à un polynôme. Si m est fractionnaire ou un entier négatif, on a une série avec une infinité de termes.

Déterminons le rayon de convergence de la série (3):

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!}x^n,$$
$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+2]}{(n-1)!}x^{n-1},$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\ldots(m-n+2)n!}x\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x| = |x|.$$

De sorte que la série (3) converge pour $|x| < 1$.

Dans l'intervalle $(-1, 1)$ la série (3) représente une fonction $s(x)$ satisfaisant à l'équation différentielle (1) et à la condition

$$s(0) = 1.$$

Comme il n'existe qu'une seule fonction satisfaisant à l'équation différentielle (1) avec la condition initiale $s(0) = 1$, il en résulte que la somme de la série (3) est identiquement égale à la fonction $(1 + x)^m$, et l'on obtient le développement

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \tag{3'}$$

Notamment, si $m = -1$, on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{4}$$

Si $m = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \tag{5}$$

Si $m = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \tag{6}$$

2. Appliquons le développement du binôme au développement d'autres fonctions. Développons en série de Maclaurin la fonction

$$f(x) = \arcsin x.$$

Remplaçant x par $-x^2$ dans l'égalité (6), on obtient:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}x^{2n} + \ldots$$

En vertu du théorème sur l'intégration des séries entières, on a pour $|x| < 1$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots \\ \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Cette série converge dans l'intervalle $(-1, 1)$. On pourrait démontrer que la série converge également lorsque $x = \pm 1$ et que la somme correspondant à ces valeurs représente $\arcsin x$. Alors, posant $x = 1$, on obtient cette formule pour calculer π:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

§ 20. Développement de la fonction Log $(1+x)$ en série entière. Calcul de logarithmes

Intégrant l'égalité (4) du § 19 de 0 à x (avec $|x|<1$), on obtient :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\ldots)\,dt$$

ou

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (1)$$

Cette égalité est vraie dans l'intervalle $(-1, 1)$.

Si l'on remplace x par $-x$ dans cette formule, on obtient la série

$$\operatorname{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad (2)$$

qui converge dans l'intervalle $(-1, 1)$.

Les séries (1) et (2) permettent de calculer les logarithmes de nombres compris entre zéro et deux. Indiquons sans le démontrer que le développement (1) subsiste pour $x = 1$.

Donnons une formule permettant de calculer les logarithmes naturels des nombres entiers.

Comme la différence terme à terme de deux séries convergentes est une série convergente (voir § 1, théorème 3), on obtient en retranchant terme à terme (2) de (1) :

$$\operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log}(1-x) =$$
$$= \operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right].$$

Posons ensuite $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$; on a $x = \frac{1}{2n+1}$. On a pour tout $n > 0$ $0 < x < 1$, donc

$$\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Log}\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right],$$

d'où

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n =$$
$$= 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right]. \qquad (3)$$

On en déduit pour $n = 1$:

$$\operatorname{Log} 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right].$$

Pour calculer Log 2 avec la précision voulue δ, il faut calculer la somme partielle s_p en prenant un nombre p de termes tel que la somme des termes négligés (c'est-à-dire l'erreur R_p faite en remplaçant s par s_p) soit inférieure à l'erreur admise δ. Evaluons, à cet effet, l'erreur R_p :

$$R_p = 2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+3)\,3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+5)\,3^{2p+5}} + \dots\right].$$

Comme les nombres $2p + 3$, $2p + 5$, . . . sont supérieurs à $2p + 1$, nous augmentons la valeur de chaque fraction lorsque nous remplaçons ces nombres par $2p + 1$. Donc,

$$R_p < 2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+5}} + \dots\right],$$

ou

$$R_p < \frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+3}} + \frac{1}{3^{2p+5}} + \dots\right].$$

Nous avons entre crochets une progression géométrique de raison $\frac{1}{9}$. La somme de cette série est

$$R_p < \frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p-1}4}. \tag{4}$$

Si l'on veut à présent calculer Log 2, par exemple, à 0,000000001 près, il faut choisir p de sorte que l'on ait $R_p < 0{,}000000001$. On y arrive en prenant p de sorte que le second membre de l'inégalité (4) soit inférieur à 0,000000001. On vérifie qu'il suffit de prendre $p = 8$. Ainsi, à 0,000000001 près, on a

$$\operatorname{Log} 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right] = 0{,}693147180.$$

La réponse est Log 2 = 0,693147180, avec neuf décimales exactes.

Posant dans la formule (3) $n = 2$, on obtient :

$$\operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \dots\right] = 1{,}098612288. \text{ etc.}$$

Nous pouvons donc calculer les logarithmes naturels de n'importe quel entier.

Pour obtenir les logarithmes décimaux, il faut se servir de la relation (voir § 8, chap. II, t. I)

$$\log N = M \operatorname{Log} N,$$

avec $M = 0{,}434294$. On a ainsi

$$\log 2 = 0{,}434294 \cdot 0{,}693147 = 0{,}30103.$$

§ 21. Application des séries au calcul d'intégrales définies

Nous avons montré aux chapitres X et XI (t. I) qu'il existait des intégrales définies qui, considérées comme fonctions de leurs bornes supérieures, ne s'exprimaient pas sous forme finie au moyen des fonctions élémentaires. Il est parfois commode de calculer de telles intégrales au moyen des séries.

Considérons quelques exemples.

1. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx.$$

La primitive de e^{-x^2} n'est pas une fonction élémentaire. Pour calculer l'intégrale, développons la fonction sous le signe somme en série en remplaçant dans le développement de e^x (voir formule (2), § 17) x par $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Intégrant les deux membres de cette égalité de 0 à a, on obtient

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Big|_0^a =$$
$$= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \ldots$$

Cette égalité permet de calculer l'intégrale, quel que soit a, avec l'approximation voulue.

2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Développons la fonction sous le signe somme en série : comme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

on a :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

cette dernière série convergeant quel que soit x. On obtient en intégrant terme à terme :

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \dots$$

Il est facile de calculer la somme de cette série avec la précision voulue, quel que soit a.

3. Calculer l'intégrale elliptique

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \qquad (k<1).$$

Développons l'expression sous le signe somme en série du binôme, avec $m=\frac{1}{2}$, $x=-k^2\sin^2\varphi$ (voir formule (5), § 19) :

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4\sin^4\varphi - \\ - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^6\sin^6\varphi - \dots$$

Cette série converge quel que soit φ et peut être intégrée terme à terme, étant donné qu'elle est majorable dans tout intervalle. Par conséquent,

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt = \varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\sin^2 t\,dt - \\ - \frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4\int_0^{\varphi}\sin^4 t\,dt - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^2\int_0^{\varphi}\sin^6 t\,dt - \dots$$

Les intégrales du second membre se calculent élémentairement. On a pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

(voir § 6, chap. XI, t. I) et, par suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \dots\right].$$

§ 22. Application des séries à l'intégration d'équations différentielles

Si l'intégration d'une équation différentielle ne se ramène pas à des quadratures, on a alors recours à des méthodes d'intégration approchée. Une de ces méthodes consiste à représenter la solution de l'équation sous forme de série de Taylor; la somme d'un nombre fini de termes de cette série sera approximativement égale à la solution particulière cherchée.

Supposons, par exemple, que l'on ait à chercher la solution d'une équation différentielle du second ordre

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$(y)_{x=x_0} = y_0, \quad (y')_{x=x_0} = y'_0. \tag{2}$$

Supposons que la solution $y = f(x)$ existe et peut être représentée par une série de Taylor (nous ne nous appesantirons pas sur la question des conditions devant être vérifiées pour que cela ait lieu):

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} f''(x_0) + \ldots \tag{3}$$

Nous devons trouver $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., c'est-à-dire les valeurs des dérivées de la solution particulière pour $x = x_0$. On les trouve au moyen de l'équation (1) et des conditions (2).

En effet, il résulte des conditions (2):

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y'_0;$$

on déduit de l'équation (1):

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0).$$

Dérivant les deux membres de l'équation (1) par rapport à x

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')\, y' + F'_{y'}(x, y, y')\, y'' \tag{4}$$

et substituant $x = x_0$ dans le second membre, on trouve:

$$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}.$$

Dérivons la relation (4) encore une fois, on a

$$f^{\mathrm{IV}}(x_0) = (y^{\mathrm{IV}})_{x=x_0},$$

et ainsi de suite.

Substituons les valeurs des dérivées trouvées dans l'égalité (3). Cette série représente la solution de l'équation proposée pour les valeurs de x pour lesquelles elle converge.

Exemple 1. Trouver la solution de l'équation

$$y'' = -yx^2,$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (y')_{x=0} = 0.$$

Solution. On a:

$$f(0) = y_0 = 1; \quad f'(0) = y'_0 = 0.$$

On déduit de l'équation donnée $(y'')_{x=0} = f''(0) = 0$; puis,

$$y''' = -y'x^2 - 2xy, \qquad (y''')_{x=0} = f'''(0) = 0,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = -y''x^2 - 4xy' - 2y, \quad (y^{\mathrm{IV}})_{x=0} = -2$$

et, plus généralement, en dérivant k fois les deux membres de l'équation par application de la formule de Leibniz, on trouve (§ 22, chap. III, t. I):

$$y^{(k+2)} = -y^{(k)}x^2 - 2kxy^{(k-1)} - k(k-1)\,y^{(k-2)}.$$

Posant $x=0$, on obtient:

$$y_0^{(k+2)} = -k(k-1)\,y_0^{(k-2)}$$

ou, posant $k+2=n$,

$$y_0^{(n)} = -(n-3)(n-2)\,y_0^{(n-4)}.$$

D'où

$$y_0^{\mathrm{IV}} = -1\cdot 2, \quad y_0^{(8)} = -5\cdot 6 y_0^{\mathrm{IV}} = (-1)^2(1\cdot 2)(5\cdot 6),$$

$$y_0^{(12)} = -9\cdot 10 y_0^{(8)} = (-1)^3(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_0^{4k} = (-1)^k(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10)\ldots[(4k-3)(4k-2)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En outre,

$$y_0^{(5)} = 0, \quad y_0^{(9)} = 0, \quad \ldots, \quad y_0^{(4k+1)} = 0, \quad \ldots,$$

$$y_0^{(6)} = 0, \quad y_0^{(10)} = 0, \quad \ldots, \quad y_0^{(4k+2)} = 0, \quad \ldots,$$

$$y_0^{(7)} = 0, \quad y_0^{(11)} = 0, \quad \ldots, \quad y_0^{(4k+3)} = 0, \quad \ldots$$

De sorte que seules ne s'annulent pas les dérivées d'ordres multiples de quatre.

Substituant les valeurs des dérivées trouvées dans la série de Maclaurin, on obtient la solution de l'équation proposée

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!}\,1\cdot 2 + \frac{x^8}{8!}(1\cdot 2)(5\cdot 6) - \frac{x^{12}}{12!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10) +$$

$$+ \ldots + (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)\ldots[(4k-3)(4k-2)] + \ldots$$

On vérifie au moyen de la règle de d'Alembert que cette série converge pour toutes les valeurs de x, donc elle est solution de l'équation différentielle.

Lorsque l'équation est linéaire, il est commode de chercher les coefficients du développement d'une solution particulière par la

méthode des coefficients indéterminés. Pour cela, on « substitue » directement la série

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

dans l'équation différentielle et on identifie les coefficients des mêmes puissances de x de part et d'autre de l'équation.

Exemple 2. Trouver la solution de l'équation

$$y'' = 2xy' + 4y,$$

vérifiant les conditions initiales

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y')_{x=0} = 1.$$

Solution. Posons

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

On trouve, compte tenu des conditions initiales,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y &= x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \\ y' &= 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \\ y'' &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

Substituant les expressions ci-dessus dans l'équation proposée et identifiant les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve :

$$\begin{aligned} &2a_2 = 0, && \text{d'où } a_2 = 0; \\ &3\cdot 2a_3 = 2 + 4, && \text{d'où } a_3 = 1; \\ &4\cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2, && \text{d'où } a_4 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$n(n-1)a_n = (n-2)2a_{n-2} + 4a_{n-2}, \quad \text{d'où } a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent,

$$a_5 = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}; \quad a_7 = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}; \quad a_9 = \frac{1}{4!}; \quad \ldots;$$

$$a_{2k+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}; \quad \ldots;$$

$$a_4 = 0; \; a_6 = 0; \quad \ldots; \; a_{2k} = 0 \ldots$$

Substituant les coefficients trouvés, on trouve la solution cherchée

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

La série obtenue converge quel que soit x.

Remarquons que la solution particulière trouvée s'exprime au moyen des fonctions élémentaires : en effet, si l'on met x en facteur, on obtient le développement de la fonction e^{x^2}. Donc,

$$y = xe^{x^2}.$$

§ 23. Equation de Bessel

On appelle ainsi une équation de la forme

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\, y = 0 \quad (p = \text{const}). \tag{1}$$

Il convient de chercher la solution de cette équation, comme les solutions de certaines autres équations à coefficients variables, non pas sous forme de série entière, mais sous forme de produit d'une certaine puissance de x pa une série entière:

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2}$$

Il est loisible de prendre a_0 différent de zéro, étant donné que l'exposant r est indéterminé.

Recopions l'expression (2) sous la forme

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

et cherchons ses dérivées:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\, a_k x^{r+k-1};$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)\, a_k x^{r+k-2}.$$

Substituons ces expressions dans l'équation (1):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)\, a_k x^{r+k-2} +$$
$$+ x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\, a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Annulant les coefficients de x à la puissance $r, r+1, r+2, \ldots$ $\ldots, r+k$, on obtient le système d'équations différentielles:

$$\left.\begin{array}{ll}
[r(r-1)+r-p^2]\, a_0 = 0 \text{ ou} & [r^2-p^2]\, a_0 = 0, \\
[(r+1)r+(r+1)-p^2]\, a_1 = 0 \text{ ou} & [(r+1)^2-p^2]\, a_1 = 0, \\
[(r+2)(r+1)+(r+2)-p^2]\, a_2 + a_0 = 0 & \\
\qquad\qquad \text{ou} & [(r+2)^2-p^2]\, a_2 + a_0 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
[(r+k)(r+k-1)+(r+k)-p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0 & \\
\qquad\qquad \text{ou} & [(r+k)^2-p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Considérons la dernière égalité :

$$[(r+k)^2 - p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0. \tag{3'}$$

On peut la recopier sous la forme

$$[(r+k-p)\,(r+k+p)]\, a_k + a_{k-2} = 0.$$

Par hypothèse $a_0 \neq 0$; par conséquent,

$$r^2 - p^2 = 0,$$

donc, $r_1 = p$ ou bien $r_2 = -p$.

Considérons d'abord la solution correspondant à $r_1 = p > 0$.

On déduit successivement du système d'équations (3) tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots$; a_0 étant arbitraire. Prenons, par exemple, $a_0 = 1$. Alors

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k\,(2p+k)}.$$

On trouve en donnant à k diverses valeurs :

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \text{ et, en général, } \quad a_{2m+1} = 0\,; \\ a_2 = -\dfrac{1}{2\,(2p+2)}\,; \quad a_4 = \dfrac{1}{2\cdot 4\,(2p+2)\,(2p+4)}\,; \ldots; \\ a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1}\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu\,(2p+2)\,(2p+4)\ldots(2p+2\nu)}, \ldots \end{array}\right\} \tag{4}$$

On obtient en substituant les coefficients trouvés dans la formule (2) :

$$y_1 = x^p\left[1 - \frac{x^2}{2\,(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2p+2)\,(2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2p+2)\,(2p+4)\,(2p+6)} + \ldots\right]. \tag{5}$$

Tous les coefficients $a_{2\nu}$ sont déterminés car, pour tout k, le coefficient de a_k dans l'équation (3)

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

n'est pas nul.

Ainsi, y_1 est une solution particulière de l'équation (1).

Cherchons maintenant dans quelles conditions tous les coefficients a_k sont déterminés lorsqu'on considère la seconde racine $r_2 = -p$. Il faut pour cela que soit vérifiée l'inégalité suivante pour tout k entier positif pair :

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \tag{6}$$

ou

$$r_2 + k \neq p.$$

Or, $p = r_1$, par conséquent,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

Ainsi, la condition (6) est, dans ce cas, équivalente à la suivante :

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

k étant un entier positif pair. Mais,

$$r_1 = p, \quad r_2 = -p,$$

par conséquent,

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

De sorte que, si p n'est pas un nombre entier, on peut écrire une seconde solution particulière que l'on déduit de l'expression (5) en remplaçant p par $-p$:

$$y_2 = x^{-p}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \dots\right]. \tag{5'}$$

Les séries entières (5) et (5′) convergent quel que soit x, ce qui est facile de vérifier en appliquant la règle de d'Alembert. Il est également évident que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes *).

La solution y_1, multipliée par un certain facteur constant, est appelée *fonction de Bessel de première espèce d'ordre p* et on la représente par J_p. La solution y_2 est représentée par J_{-p}.

Par conséquent, lorsque p n'est pas un nombre entier, la solution générale de l'équation (1) s'écrit

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}.$$

Ainsi, si $p = \frac{1}{2}$, la série (5) s'écrit

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \dots\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right].$$

---

*) On vérifie comme suit l'indépendance linéaire de ces fonctions. Considérons le rapport

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p}\,\frac{1 - \dfrac{x^2}{2(-2p+2)} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \dots}{1 - \dfrac{x^2}{2(2p+2)} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots}.$$

Ce rapport n'est pas constant, étant donné qu'il tend vers l'infini lorsque $x \to 0$. Donc, les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Cette solution, multipliée par $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, est appelée fonction de Bessel $J_{\frac{1}{2}}$; notons que l'expression entre crochets est le développement en série de $\sin x$. Par conséquent,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

On obtient de la même manière à partir de la formule (5') :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) lorsque $p = \frac{1}{2}$ est

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Supposons maintenant que p soit un nombre entier positif que nous désignerons par n ($n \geqslant 0$). La solution (5) a alors un sens et représente une première solution particulière de l'équation (1).

Mais la solution (5') ne représente plus rien, car certains dénominateurs du développement s'annulent.

Pour $p = n$ entier positif, on prend pour fonction de Bessel J_n la série (5) multipliée par le facteur $\frac{1}{2^n n!}$ (lorsque $n = 0$, on prend le facteur 1) :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots\right]$$

ou

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}. \tag{7}$$

On démontre qu'il faut chercher dans ce cas une seconde solution particulière sous la forme

$$K_n(x) = J_n(x) \operatorname{Log} x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Substituant cette expression dans l'équation (1), on détermine les coefficients b_k.

La fonction $K_n(x)$ avec des coefficients ainsi définis est appelée, après multiplication par un certain facteur constant, *fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre n*.

C'est une seconde solution de l'équation (1), qui, avec la première, forme un système linéairement indépendant.

L'intégrale générale s'écrit

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \tag{8}$$

Notons que

$$\lim_{x \to 0} K_n(x) = \infty.$$

Par conséquent, si l'on veut se borner aux solutions finies pour $x = 0$, il faudra poser $C_2 = 0$ dans la formule (8).

Exemple. Trouver la solution de l'équation de Bessel pour $p = 0$

$$y'' + \frac{1}{x} + y' + y = 0$$

satisfaisant aux conditions initiales:

$$\text{pour } x = 0,\ y = 2,\ y' = 0.$$

Solution. On trouve d'après la formule (7) la solution particulière

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \\ + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots$$

Utilisant cette solution, on peut écrire la solution satisfaisant aux conditions initiales données, à savoir:

$$y = 2 J_0(x).$$

Remarque. Si l'on avait à chercher l'intégrale générale de l'équation proposée, on chercherait une seconde solution particulière sous la forme

$$K_0(x) = J_0(x) \operatorname{Log} x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Bornons-nous à indiquer que la seconde solution particulière, que nous désignons par $K_0(x)$, s'écrit

$$K_0(x) = J_0(x) \operatorname{Log} x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \ldots$$

Après multiplication par un certain facteur constant, cette fonction s'appelle *fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro.*

§ 24. Séries à termes complexes

Soit la suite des nombres complexes

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$$

où

$$z_n = a_n + ib_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Definition 1. Le nombre complexe $z_0 = a + ib$ est appelé *limite de la suite* des nombres complexes $z_n = a_n + ib_n$ si

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0. \tag{1}$$

Ecrivons la condition (1) sous la forme:

$$z_n - z_0 = (a_n + ib_n) - (a + ib) = (a_n - a) + i(b_n - b),$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0. \tag{2}$$

De l'équation (2) il vient que la condition (1) est vérifiée si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b. \tag{3}$$

Composons la série à termes complexes

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots, \tag{4}$$

où

$$w_n = u_n + iv_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Désignons par s_n la somme des n premiers termes:

$$s_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n, \tag{5}$$

s_n est un nombre complexe

$$s_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right). \tag{6}$$

Définition 2. Si

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = A + iB$$

existe, la série (4) est dite *convergente* et s en est *la somme*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = A + iB. \tag{7}$$

De l'égalité (3) et de la condition (6) il vient

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k. \tag{8}$$

Si $\lim s_n$ n'existe pas, on dit que la série (4) est *divergente*.

Le théorème suivant est d'une grande utilité pour l'étude de la convergence de la série (4).

Théorème 1. *La série* (4) *est convergente si la série formée avec les valeurs absolues de ses termes*

$$|w_1|+|w_2|+\ldots+|w_n|+\ldots, \quad \text{où } |w_n|=\sqrt{u_n^2+v_n^2} \tag{9}$$

est convergente.

Démonstration. Les égalités (8) (en vertu du théorème correspondant sur la convergence absolue des séries à termes réels) et, par conséquent, l'égalité (7) découlent immédiatement de la convergence de la série (9) et des conditions

$$|u_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2}=|w_n|, \quad |v_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2}=|w_n|.$$

Le théorème que nous venons de démontrer permet d'appliquer aux séries à termes complexes tous les critères suffisants de convergence établis pour les séries à termes positifs.

§ 25. Séries entières d'une variable complexe

Voyons à présent les séries entières à termes complexes.

Définition 1. On appelle *série entière d'une variable complexe* la série

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots, \tag{1}$$

où $z=x+iy$ est une variable complexe, x et y des nombres réels, c_n des constantes complexes ou réelles.

Pour les séries entières d'une variable complexe, il existe une théorie analogue à celle des séries entières à termes réels.

Définition 2. L'ensemble des valeurs de z dans le plan d'une variable complexe, pour lesquelles la série (1) converge, est appelé *domaine de convergence* de la série entière (pour chaque valeur donnée de z la série (1) se transforme en une série numérique à termes complexes de la forme (4), § 24).

Définition 3. La série (1) est dite *absolument convergente* si la série formée avec les valeurs absolues de ses termes

$$|c_0|+|c_1z|+|c_2z^2|+\ldots+|c_nz^n|+\ldots \tag{2}$$

converge.

Enonçons sans le démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Le domaine de convergence de la série entière à termes complexes* (1) *est représenté sur le plan complexe de la variable*

z par un cercle dit cercle de convergence centré à l'origine des coordonnées. La série (1) *est absolument convergente en tous les points situés à l'intérieur de ce cercle.*

Le rayon R de ce cercle est appelé *rayon de convergence* de la série entière. Si R est le rayon de convergence de la série entière (1), on dit que cette série est convergente dans le domaine

$$|z| < R.$$

(Aux points frontières $|z| = R$ la convergence est établie au moyen d'une étude complémentaire comme aux extrémités de l'intervalle pour le cas d'une série entière d'une variable réelle.) Notons qu'en fonction des coefficients c_n le rayon de convergence R peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre $R = 0$ et $R = \infty$. Dans le premier cas, la série ne converge qu'au point $z = 0$, dans le second, elle converge pour toute valeur de z.

Soit

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{3}$$

Si z varie à l'intérieur du cercle de convergence, la fonction $f(z)$ variera également en conséquence. Donc, toute série entière d'une variable complexe définit à l'intérieur du cercle de convergence une fonction correspondante d'une variable complexe. C'est une *fonction analytique* d'une variable complexe. Citons quelques exemples de fonctions d'une variable complexe définies par des séries entières d'une variable complexe.

1) $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{4}$$

est l'*exponentielle d'une variable complexe*. Si nous faisons $y = 0$, nous obtenons la formule (2), § 17. Si $x = 0$, nous obtenons l'égalité (1), § 18.

2) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \tag{5}$$

est *le développement du sinus d'une variable complexe*. En faisant $y = 0$ nous obtenons la formule (1), § 17.

3) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \tag{6}$$

est *le développement du cosinus d'une variable complexe*. En remplacant z par iz dans les deux membres de la formule (4) et en opérant comme dans le § 18, nous obtenons

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{7}$$

qui n'est autre que *la formule d'Euler pour la variable complexe z*.

Si z est un réel, nous retrouvons la formule (2), § 18.

4) $$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \tag{8}$$

5) $$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \tag{9}$$

Les deux dernières formules sont analogues aux formules (5) et (6), § 17, et coïncident avec elles si $z = x$ est un nombre réel.

En partant des formules (4), (5), (6), (8) et (9) il est aisé d'établir les formules suivantes:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \tag{10}$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z, \tag{11}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{12}$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2}, \quad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}. \tag{13}$$

Notons que les séries (4), (5), (6), (8), (9) convergent pour toutes les valeurs de z en vertu du théorème 1 et du § 24. Comme pour les séries entières d'une variable réelle, on étudie des séries d'une variable complexe suivant les puissances de $(z - z_0)$ où z_0 est un nombre complexe;

$$c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots, \tag{14}$$

c_n sont des constantes complexes ou réelles. La série (14) se ramène à la forme (1) au moyen de la substitution $z - z_0 = z^*$. Toutes les propriétés et théorèmes établis pour la série (1) restent en vigueur pour la série (14), sauf que le cercle de convergence de la série (14), au lieu d'être centré à l'origine des coordonnées, est centré au point z_0.

R étant le rayon de convergence de la série, on dit que cette série converge dans le domaine

$$|z - z_0| < R.$$

§ 26. Résolution de l'équation différentielle du premier ordre par la méthode des approximations successives (méthode d'itération)

Dans les §§ 32, 33 et 34 du chap. XIII nous avons étudié l'intégration approchée des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles par les méthodes des différences finies. Nous allons à présent voir une autre méthode de leur intégration approchée. Précisons que cet exposé tiendra également lieu de démonstration du théorème d'existence de la solution de l'équation diffé-

rentielle (cf. § 2. chap. XIII). Nous aurons recours à la théorie de séries.

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

satisfaisant à la condition initiale

$$y = y_0 \quad \text{pour } x = x_0. \tag{2}$$

En intégrant les membres de l'équation (1) de x_0 à x et en tenant compte de la condition initiale nous obtenons :

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + y_0. \tag{3}$$

La fonction inconnue y se trouvant sous le signe d'intégration, l'équation (3) est appelée *équation intégrale*.

La fonction $y = y(x)$ vérifiant l'équation (1) et la condition initiale (2) vérifie l'équation (3). Et inversement, il est évident que la fonction $y = y(x)$ vérifiant l'équation (3) vérifie également l'équation (1) et la condition initiale (2).

Examinons tout d'abord la méthode des solutions approchées de l'équation (1) pour les conditions initiales (2).

Soit y_0 l'approximation *nulle* de la solution. En remplaçant y par y_0 dans la fonction à intégrer du deuxième membre de l'égalité (3) nous obtenons

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx + y_0. \tag{4}$$

$y_1(x)$ est la *première* solution approchée de l'équation différentielle (1) vérifiant la condition initiale (2).

Portons à présent la première approximation $y_1(x)$ dans la fonction à intégrer de l'égalité (3)

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\, dx + y_0. \tag{5}$$

Nous obtenons de la sorte la *deuxième* approximation. Poursuivons ce processus :

$$\left.\begin{aligned} y_3(x) &= \int_{x_0}^{x} f[x, y_2(x)]\, dx + y_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) &= \int_{x_0}^{x} f[(x, y_{n-1}(x)]\, dx + y_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Plus bas nous indiquerons l'approximation qu'il faudra prendre compte tenu de la précision requise.

Exemple. Trouver la solution approchée de l'équation $y' = x + y^2$ vérifiant les conditions initiales

$$y_0 = 1 \text{ pour } x = 0.$$

Solution. D'après la formule (4) nous avons:

$$y_1 = \int_0^x (x+1)\,dx + 1 = \frac{x^2}{2} + x + 1,$$

$$y_2 = \int_0^x \left[x + \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)^2\right] dx + 1 = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + 1,$$

et ainsi de suite.

§ 27. Démonstration de l'existence de la solution d'une équation différentielle. Evaluation de l'erreur d'une solution approchée

Démontrons le théorème suivant.

Théorème. *Soient l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

et les conditions initiales

$$y = y_0 \text{ pour } x = x_0. \tag{2}$$

Si $f(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ sont continues dans le domaine fermé D,

$$D\ \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\} \text{ (fig. 372)}, \tag{3}$$

il existe alors dans un certain intervalle

$$x_0 - l < x < x_0 + l \tag{4}$$

une solution et une seule de l'équation (1) *vérifiant les conditions initiales* (2). Le nombre l sera défini plus bas.

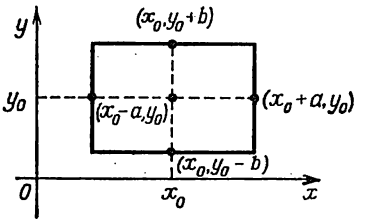


Fig. 372

Démonstration. Remarquons que de la continuité des fonctions $f(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ dans l'intervalle fermé D, il s'ensuit qu'il existe des constantes $M > 0$ et $N > 0$ telles qu'en tous les points du domaine sont vérifiées les relations:

$$|f(x, y)| \leqslant M, \tag{5}$$

$$|f'_y(x, y)| \leqslant N. \tag{6}$$

(Cette propriété est analogue à celle indiquée dans le § 10 du chap. II).

Dans l'équation (4) l est le plus petit des nombres a et $\frac{b}{M}$, c'est-à-dire

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{7}$$

Le théorème de Lagrange appliqué à la fonction $f(x, y)$ aux points quelconques $A_1(x, y_1)$ et $A_2(x, y_2)$ du domaine D donne:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = f'_y(x, \eta)(y_2 - y_1),$$

où $y_1 < \eta < y_2$; par conséquent, $|f'_y(x, \eta)| \leqslant N$. De sorte que l'inégalité

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant N\,|y_2 - y_1|\ ^{*)} \tag{8}$$

est vérifiée pour deux points quelconques.

Revenons à l'égalité (4) du § 26. Il en résulte compte tenu également des égalités (5), (4), (7)

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} M\,dx = M\,|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b. \tag{9}$$

Ainsi, la fonction $y = y_1(x)$ définie par l'égalité (4) du § 26 sur l'intervalle (4) ne sort pas du domaine D.

Passons à présent à l'égalité (5) du § 26. Les variables indépendantes de la fonction $f[x, y_1(x)]$ ne sortent pas du domaine D. Nous pouvons donc écrire

$$|y_2 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\,dx\right| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b. \tag{10}$$

Par induction on peut démontrer que pour tout n

$$|y_n - y_0| \leqslant b \tag{11}$$

si x appartient à l'intervalle (4).

Démontrons maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \tag{12}$$

---

*) Remarquons que si pour une fonction quelconque $F(y)$ la condition

$$|F(y_2) - F(y_1)| \leqslant K\,|y_2 - y_1|,$$

où y_2 et y_1 sont deux points quelconques d'un certain domaine et K un nombre constant, est vérifiée, cette condition est dite *condition de Lipschitz*. Par la relation (8), nous avons donc démontré que si la fonction $f(x, y)$ admet une dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ bornée dans un certain domaine, elle y vérifie la condition de Lipschitz. La réciproque n'est pas toujours vraie.

existe et que la fonction $y(x)$ vérifie l'équation différentielle (1) et les conditions initiales (2). Considérons pour cela la série

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \\ + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \tag{13}$$

ayant pour terme général $u_n = y_n - y_{n-1}$ et $u_0 = y_0$. De toute évidence la somme des $n+1$ premiers termes de cette série est

$$s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i = y_n. \tag{14}$$

Evaluons les termes de la série (13) en valeur absolue

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx \right| \leqslant M\, |x - x_0|. \tag{15}$$

En vertu de (4), (5) du § 26 et (6) il vient

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1) - f(x, y_0)]\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f'_y(x, \eta_1)(y_2 - y_1)\, dx \right| \leqslant \pm N \int_{x_0}^{x} M\, |x - x_0|\, dx =$$

$$= N \frac{M}{2} |x - x_0|^2$$

(on prend le signe $+$ si $x_0 < x$ et le signe $-$ si $x_0 > x$). Donc

$$|y_2 - y_1| \leqslant M \frac{N}{1 \cdot 2} |x - x_0|^2. \tag{16}$$

En tenant compte de (16) nous obtenons

$$|y_3 - y_2| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_2) - f(x, y_1)]\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f'_y(x, \eta_2)(y_2 - y_1)\, dx \right| \leqslant \pm N \int_{x_0}^{x} \frac{NM}{2} |x - x_0|^2\, dx =$$

$$= M \frac{N^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x - x_0|^3. \tag{17}$$

Et de proche en proche jusqu'à

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant M \frac{N^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n. \tag{18}$$

La série de fonctions (13) est donc majorable dans l'intervalle $|x - x_0| < l$. La série numérique à termes positifs plus grands

que les valeurs absolues des termes correspondants de la série (13) s'écrit

$$y_0 + Ml + M\frac{Nl^2}{2!} + M\frac{N^2l^3}{3!} + \ldots + M\frac{N^{n-1}l^n}{n!} + \ldots \qquad (19)$$

avec un terme général $v_n = M\frac{N^{n-1}l^n}{n!}$. On s'assure aisément de sa convergence en appliquant le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{v_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{M\frac{N^{n-1}l^n}{n!}}{M\frac{N^{n-2}l^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Nl}{n} = 0 < 1.$$

La série (13) est majorable, elle est donc convergente. Comme ses membres sont des fonctions continues, elle converge vers une fonction continue $y(x)$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} y_n = y(x), \qquad (20)$$

où $y(x)$ est une fonction continue vérifiant la condition initiale étant donné que pour tous les n

$$y_n(x_0) = y_0.$$

Démontrons que la fonction $y(x)$ que nous venons d'obtenir vérifie l'équation (1). Recopions la dernière des équations (6) du § 26

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx. \qquad (21)$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx, \qquad (22)$$

où $y(x)$ est déterminée par l'égalité (20).

Remarquons auparavant ce qui suit. Etant donné que la série (13) est majorable, il résulte de l'égalité (20) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n tel que

$$|y - y_n| < \varepsilon. \qquad (23)$$

En tenant compte de (23), dans tout l'intervalle (4) nous avons

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx\right| \leqslant \pm\int_{x_0}^{x} |f(x, y) - f(x, y_n)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \pm\int_{x_0}^{x} N|y - y_n|\,dx \leqslant N\varepsilon|x - x_0|.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon = 0$; par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx \right| = 0.$$

De cette dernière égalité découle l'égalité (22).

En passant à présent dans les deux membres de l'égalité (21) à la limite lorsque $n \to \infty$, nous constatons que $y(x)$ définie par l'égalité (20) vérifie l'équation

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{24}$$

Par conséquent, comme nous l'avons indiqué plus haut, la fonction $y(x)$ que nous venons de trouver vérifie l'équation différentielle (1) et les conditions initiales (2).

Remarque 1. D'autres méthodes de démonstration permettent d'affirmer qu'il existe une solution de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales (2) si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine D (théorème de Peano) *).

Remarque 2. Par un procédé analogue à celui qui nous a permis d'établir la relation (18), nous pouvons montrer que l'erreur qui apparaît après la substitution de la solution $y(x)$ par sa n-ième approximation y_n est donnée par la formule

$$|y - y_n| \leqslant \frac{N^n M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leqslant \frac{M N^n l^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{25}$$

Exemple. Appliquons cette évaluation à la cinquième approximation y_5 de la solution de l'équation

$$y' = x + y^2$$

pour les conditions initiales $y_0 = 1$ quand $x = 0$.

Soit D un domaine défini comme suit :

$$D\left\{-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1\right\},$$

c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. Par conséquent, $M = \frac{3}{2}$, $N = 2$ et

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

D'après la formule (25) nous obtenons :

$$|y - y_5| \leqslant \frac{2^5 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} = \frac{1}{960}.$$

*) Voir, par exemple, l'ouvrage de I. Pétrovsky « Conférences sur les équations différentielles ordinaires » (en russe).

Remarquons que l'évaluation (25) est assez grossière. On peut montrer que l'application d'autres méthodes à l'exemple cité donne une erreur à plusieurs dizaines de fois moindre.

§ 28. Théorème d'unicité de la solution de l'équation différentielle

Démontrons le théorème suivant.

Théorème. *Si la fonction $f(x, y)$ est continue et admet une dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur le domaine D, définie au § 27, la solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

pour les conditions initiales

$$y = y_0 \quad \text{quand} \quad x = x_0 \tag{2}$$

est alors unique, c'est-à-dire que par le point (x_0, y_0) il ne passe qu'une seule et unique courbe intégrale de l'équation (1).

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions de l'équation (1) vérifiant les conditions (2) c'est-à-dire deux courbes $y(x)$ et $z(x)$ passant par le point $A(x_0, y_0)$. Ces deux fonctions vérifient donc l'équation (24) du § 27 :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx, \qquad z = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, z)\, dx.$$

Considérons la différence

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x, y) - f(x, z)]\, dx. \tag{3}$$

D'après la formule de Lagrange et l'inégalité (6) du § 27 nous avons :

$$f(x, y) - f(x, z) = \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y}(y - z), \tag{4}$$

d'où il vient

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant N\,|y - z|. \tag{5}$$

D'après (3) et (5) on peut écrire

$$|y - z| = \left|\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - z)\, dx\right| \leqslant \pm \int_{x_0}^{x} N\,|y - z|\, dx. \tag{6}$$

Soit x tel que $|x - x_0| < \frac{1}{N}$. Pour fixer les idées prenons $x_0 < x$, la démonstration étant analogue pour $x < x_0$.

Supposons que $\lambda = \max |y - z|$ dans l'intervalle $x - x_0 < \frac{1}{N}$ pour une valeur de $x = x^*$. L'inégalité (6) pour le point x^* s'écrit alors sous la forme :

$$\lambda \leqslant N \int_{x_0}^{x_0^*} \lambda\, dx = N\lambda (x^* - x_0) < N\lambda \frac{1}{N} < \lambda,$$

d'où

$$\lambda < \lambda.$$

En admettant l'existence de deux solutions distinctes nous avons abouti à une contradiction. Par conséquent, la solution est unique.

R e m a r q u e 1. On peut montrer que la solution sera unique moyennant moins de conditions sur la fonction $f(x, y)$ *).

R e m a r q u e 2. Si la fonction $f(x, y)$ admet une dérivée partielle non bornée dans le domaine, il peut alors fort bien exister plusieurs solutions vérifiant l'équation (1) et les conditions initiales (2).

Considérons, en effet, l'équation

$$y' = 3x\sqrt[3]{y} \qquad (7)$$

avec les conditions initiales

$$y = 0 \text{ pour } x = 0. \qquad (8)$$

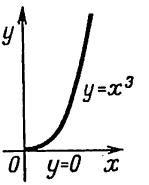


Fig. 373

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy^{-\frac{2}{3}} \to \infty \text{ quand } y \to 0.$$

Dans ce cas l'équation (7) admet deux solutions vérifiant les conditions initiales (8) :

$$y = 0, \quad y = x^3.$$

Une substitution directe permet de s'assurer que ces deux fonctions sont solutions de l'équation (7). Les deux courbes intégrales passent par l'origine des coordonnées (fig. 373).

Exercices

Ecrire les premiers termes des séries dont on connaît le terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$. 3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 4. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^k}$.

5. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$.

*) Voir le même ouvrage de I. Pétrovsky indiqué sur la p. 345.

Etudier la convergence des séries suivantes :

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$ Rép. Convergence.

7. $\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt{30}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10n}}+\ldots$ Rép. Divergence.

8. $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}+\ldots$ Rép. Divergence.

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}+\ldots$ Rép. Divergence.

10. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots$ Rép. Convergence.

11. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$ Rép. Divergence.

12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}+\ldots$ Rép. Convergence.

Etudier la convergence des séries de termes généraux :

13. $u_n=\frac{1}{n^3}$. Rép. Convergence. 14. $u_n=\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}$. Rép. Divergence.

15. $u_n=\frac{2}{5n+1}$. Rép. Divergence. 16. $u_n=\frac{1+n}{3+n^2}$. Rép. Divergence.

17. $u_n=\frac{1}{n^2+2n+3}$. Rép. Convergence. 18. $u_{n-1}=\frac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n}$. Rép. Divergence.

19. Démontrer l'inégalité $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\mathrm{Log}\,(n+1)>\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}$.

20. Le théorème de Leibniz est-il applicable à la série $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$?

Rép. Il n'est pas applicable, étant donné que les termes de la série ne décroissent pas monotonement en valeur absolue. La série diverge.

Combien de termes faut-il prendre dans les séries suivantes pour avoir la somme correspondante à $\frac{1}{10^6}$ près :

21. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}+\ldots$ Rép. $n=20$.

22. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ Rép. $n=10^6$.

23. $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots$ Rép. $n=10^3$.

24. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\ldots$ Rép. $n=10$.

Dire si les séries suivantes convergent absolument :

25. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$ Rép. Convergence absolue.

26. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$ Rép. Convergence absolue.

27. $\frac{1}{\operatorname{Log}2}-\frac{1}{\operatorname{Log}3}+\frac{1}{\operatorname{Log}4}-\frac{1}{\operatorname{Log}5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\operatorname{Log}n}+\ldots$ Rép. Semi-convergence.

28. $-1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\ldots$ Rép. Semi-convergence.

Trouver la somme de la série :

29. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$ Rép. $\frac{1}{4}$.

Pour quelles valeurs de x les séries suivantes convergent ?

30. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$ Rép. $-2<x<2$.

31. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ Rép. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

32. $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$ Rép. $|x|<\frac{1}{3}$.

33. $1+\frac{100x}{1\cdot3}+\frac{10\,000x^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1\,000\,000x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots$ Rép. $-\infty<x<\infty$.

34. $\sin x+2\sin\frac{x}{3}+4\sin\frac{x}{9}+\ldots+2^n\sin\frac{x}{3^n}+\ldots$ Rép. $-\infty<x<\infty$.

35. $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$ Rép. $-1\leqslant x<1$.

36. $x+\frac{2^k}{2!}x^2+\frac{3^k}{3!}x^3+\ldots+\frac{n^k}{n!}x^n+\ldots$ Rép. $-\infty<x<\infty$.

37. $x+\frac{2!}{2^2}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n!}{n^n}x^n+\ldots$ Rép. $-e<x<e$.

38. $x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{(1\cdot2\cdot3)^2}{6!}x^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\ldots$ Rép. $-4<x<4$.

39. Trouver la somme de la série $x+2x^2+\ldots+nx^n+\ldots$ ($|x|<1$).

Indication. Ecrire la série sous la forme

$$\begin{array}{r}
x+x^2+x^3+x^4+\ldots\\
x^2+x^3+x^4+\ldots\\
x^3+x^4+\ldots\\
x^4+\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Rép. $\frac{x}{(1-x)^2}$.

Dire si les séries suivantes sont majorables sur les segments indiqués :

40. $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ ($0\leqslant x\leqslant 1$). Rép. Majorable.

41. $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ ($0\leqslant x\leqslant 1$). Rép. Non majorable.

42. $\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$ $[0, 2\pi]$. Rép. Majorable.

Développement de fonctions en séries

43. Développer $\frac{1}{10+x}$ en série des puissances de x et indiquer l'intervalle de convergence. Rép. Converge pour $-10<x<10$.

44. Développer $\cos x$ selon les puissances de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$

45. Développer e^{-x} selon les puissances de x.

$$\text{Rép. } 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

46. Développer e^x selon les puissances de $(x-2)$. Rép. $e^2+e^2(x-2)+$ $+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\ldots$

47. Développer x^3-2x^2+5x-7 selon les puissances de $(x-1)$. Rép. $-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$.

48. Développer le polynôme $x^{10}+2x^9-3x^7-6x^6+3x^4+6x^3-x-2$ en série de Taylor des puissances de $x-1$; s'assurer que ce polynôme admet 1 pour racine triple. Rép. $f(x)=81(x-1)^3+270(x-1)^4+$ $+405(x-1)^5+351(x-1)^6+186(x-1)^7+63(x-1)^8+$ $+12(x-1)^9+(x-1)^{10}$.

49. Développer $\cos(x+a)$ selon les puissances de x. Rép. $\cos a-x\sin a-$ $-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\frac{x^4}{4!}\cos a-\ldots$

50. Développer $\operatorname{Log} x$ selon les puissances de $(x-1)$. Rép. $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+$ $+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$

51. Développer e^x en série des puissances de $(x+2)$.

$$\text{Rép. } e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right].$$

52. Développer $\cos^2 x$ en série des puissances de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{Rép. } \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}\ (|x|<\infty).$$

53. Développer $\frac{1}{x^2}$ en série des puissances de $(x+1)$. Rép. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\times$ $\times(x+1)^n\ (-2<x<0)$.

54. Développer $\operatorname{tg} x$ en série des puissances de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Rép. $1+2\times$ $\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$

Ecrire les quatre premiers termes du développement en série entière des fonctions suivantes :

55. $\operatorname{tg} x$. Rép. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

56. $e^{\cos x}$. Rép. $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{720}-\ldots\right)$.

57. $e^{\operatorname{arc\,tg} x}$. Rép. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\ldots$

58. $\operatorname{Log}(1+e^x)$. Rép. $\operatorname{Log} 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$

59. $e^{\sin x}$. Rép. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$

60. $(1+x)^x$. Rép. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4-\ldots$

61. $\sec x$. Rép. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$

62. $\operatorname{Log}\cos x$. Rép. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\ldots$

63. Développer $\sin kx$ en série entière de x. Rép. $kx-\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\ldots$

64. Développer $\sin^2 x$ selon les puissances de x et déterminer l'intervalle de convergence. Rép. $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ La série converge quel que soit x.

65. Développer $\frac{1}{1+x^2}$ en série entière. Rép. $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$

66. Développer $\operatorname{arc\,tg} x$ en série entière.

Indication. Se servir de la formule $\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$. Rép. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

67. Développer $\frac{1}{(1+x)^2}$ en série entière. Rép. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ $(-1<x<1)$.

Utilisant les formules du développement en série de puissances des fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Log}(1+x)$, $(1+x)^m$ et appliquant divers procédés développer en séries de puissances les fonctions et déterminer les intervalles de convergence :

68. $\operatorname{sh} x$. Rép. $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

69. $\operatorname{ch} x$. Rép. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

70. $\cos^2 x$. Rép. $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$.

71. $(1+x)\operatorname{Log}(1+x)$. Rép. $x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x|\leqslant 1)$.

72. $(1+x)\,e^{-x}$. Rép. $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty<x<\infty)$.

73. $\frac{1}{4-x^4}$. Rép. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ $(|x|<\sqrt{2})$.

74. $\frac{e^x-1}{x}$. Rép. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

75. $\frac{1}{(1-x)^2}$. Rép. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$ $(|x|<1)$.

76. $e^x\sin x$. Rép. $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

77. $\operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})$. Rép. $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\times$ $\times\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

78. $\int_0^x\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}dx$. Rép. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x|\leqslant 1)$.

79. $\int_0^x\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}dx$. Rép. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

80. $\int\frac{\cos x}{x}dx$. Rép. $C+\operatorname{Log}|x|+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,(2n)!}$ $(-\infty<x<0$ et $0<x<\infty)$.

81. $\int_0^x\frac{dx}{1-x^9}$. Rép. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

82. Démontrer les égalités:

$$\sin(a+x)=\sin a\cos x+\cos a\sin x,$$
$$\cos(a+x)=\cos a\cos x-\sin a\sin x,$$

en développant les premiers membres suivant les puissances de x.

Calculer en s'aidant des séries:

83. $\cos 10^\circ$ à 0,0001 près. Rép. 0,9848.
84. $\sin 1^\circ$ à 0,0001 près. Rép. 0,0175.
85. $\sin 18^\circ$ à 0,001 près. Rép. 0,3090.
86. $\sin\frac{\pi}{4}$ à 0,0001 près. Rép. 0,7071.
87. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ à 0,0001 près. Rép. 0,1973.
88. Log 5 à 0,001 près. Rép. 1,609.
89. log 5 à 0,001 près. Rép. 0,699.
90. arc sin 1 à 0,0001 près. Rép. 1,5708.
91. $\sqrt{e}$ à 0,0001 près. Rép. 1,6487.
92. log e à 0,00001 près. Rép. 0,43429.

93. cos 1 à 0,0001 près. Rép. 0,5403.

Utilisant le développement en série de Maclaurin de la fonction $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$, calculer à 0,001 près:

94. $\sqrt[3]{30}$. Rép. 3,107.
95. $\sqrt{70}$. Rép. 4,121.
96. $\sqrt[3]{500}$. Rép. 8,367.
97. $\sqrt[5]{250}$. Rép. 3,017.
98. $\sqrt{84}$. Rép. 9,165.
99. $\sqrt[3]{2}$. Rép. 1,2598.

Calculer les intégrales suivantes en développant en séries les fonctions sous les signes d'intégration:

100. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ à 10^{-5} près. Rép. 0,94608.

101. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à 0,0001 près. Rép. 0,7468.

102. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)\,dx$ à 0,0001 près. Rép. 0,1571.

103. $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$ à 0,01 près. Rép. 0,81.

104. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ à 0,001 près. Rép. 0,487.

105. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ à 0,001 près. Rép. 0,764.

106. $\int_0^{0,25} \operatorname{Log}(1+\sqrt{x})\,dx$ à 0,001 près. Rép. 0,071.

107. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$ à 0,0001 près. Rép. 0,9226.

108. $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ à 0,0001 près. Rép. 0,0214.

109. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ à 0,001 près. Rép. 0,494.

110. $\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}\,dx$. Rép. $\frac{\pi^2}{12}$.

Indication. Lors de la résolution de cet exemple et des deux suivants il faut avoir en vue les égalités :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

qui seront établies au § 2 du ch. XVII.

111. $\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-x)}{x}\,dx$. Rép. $\frac{\pi^2}{6}$.

112. $\int_0^1 \operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{x}$. Rép. $\frac{\pi^2}{4}$.

Intégration d'équations différentielles par les séries

113. Trouver la solution de l'équation $y'' = xy$ satisfaisant aux conditions initiales suivantes: pour $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$.

Indication. Chercher la solution sous forme de série.

Rép. $1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\,3k}+\ldots$

114. Trouver la solution de l'équation $y''+xy'+y=0$ vérifiant les conditions initiales : pour $x=0$, $y=0$, $y'=1$.

Rép. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$.

115. Trouver la solution générale de l'équation

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

Indication. Chercher la solution sous la forme $y=x^p(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots)$. Rép. $C_1x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right]+C_2x^{-\frac{1}{2}}\times\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

116. Trouver la solution de l'équation $xy''+y'+xy=0$ satisfaisant aux conditions initiales: pour $x=0$, $y=1$, $y'=0$. Rép. $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(1\cdot 2)^2\,2^4}-\frac{x^6}{(1\cdot 2\cdot 3)^2\,2^6}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}+\ldots$

Remarque. Les deux dernières équations différentielles sont des cas particuliers de l'équation de Bessel $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)\,y=0$ lorsque $n=\frac{1}{2}$ et $n=0$.

117. Trouver la solution générale de l'équation $4xy''+2y'+y=0$.

Indication. Chercher la solution sous forme de série $x^p(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$. Rép. $C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}$.

118. Trouver la solution de l'équation $(1-x^2)\,y''-xy'=0$ satisfaisant aux conditions initiales : $y=0$, $y'=1$ pour $x=0$. Rép. $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\ldots$

119. Trouver la solution de l'équation $(1+x^2)\,y''+2xy'=0$ satisfaisant aux conditions initiales $y=0$, $y'=1$ pour $x=0$. Rép. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

120. Trouver la solution de l'équation $y''=xyy'$ satisfaisant aux conditions initiales: $y=1$, $y'=1$ pour $x=0$. Rép. $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$

121. Trouver la solution de l'équation $(1-x)\,y'=1+x-y$ satisfaisant aux conditions initiales: $y=0$ pour $x=0$, et indiquer l'intervalle de convergence de la série obtenue. Rép. $x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

122. Trouver la solution de l'équation $xy''+y=0$ satisfaisant aux conditions initiales: $y=0$, $y'=1$ pour $x=0$, et indiquer l'intervalle de convergence. Rép. $x-\frac{x^2}{(1!)^2 2}+\frac{x^3}{(2!)^2 3}-\frac{x^4}{(3!)^2 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{[(n-1)!]^2 n}+\ldots$ $+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

123. Trouver la solution de l'équation $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ satisfaisant aux conditions initiales: $y=1$, $y'=0$ pour $x=0$. Rép. $\frac{\sin x}{x}$.

124. Trouver la solution de l'équation $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$ satisfaisant aux conditions initiales: $y=1$, $y'=0$ pour $x=0$, et indiquer l'intervalle de convergence de la série obtenue. Rép. $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+$ $+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\ldots$ $(|x|<\infty)$.

Trouver les trois premiers termes du développement en série entière des solutions des équations différentielles suivantes dont on a indiqué les conditions initiales:

125. $y'=x^2+y^2$; pour $x=0$, $y=1$. Rép. $1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots$

126. $y''=e^y+x$; pour $x=0$, $y=1$, $y'=0$. Rép. $1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$

127. $y'=\sin y-\sin x$; pour $x=0$, $y=0$. Rép. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\ldots$

Trouver quelques termes du développement en série entière des solutions d'équations différentielles pour les conditions initiales indiquées:

128. $y''=yy'-x^2$; pour $x=0$, $y=1$, $y'=1$. Rép. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+$ $+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

129. $y'=y^2+x^3$; pour $x=0$, $y=\frac{1}{2}$. Rép. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\ldots$

130. $y'=x^2-y^2$; pour $x=0$, $y=0$. Rép. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7+\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\ldots$

131. $y'=x^2y^2-1$; pour $x=0$, $y=1$. Rép. $1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

132. $y'=e^y+xy$; pour $x=0$, $y=0$. Rép. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

Chapitre XVII

SÉRIES DE FOURIER

§ 1. Définition. Position du problème

On appelle *série trigonométrique* une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

Les constantes a_0, a_n et b_n ($n = 1, 2, \ldots$) sont les *coefficients de la série trigonométrique*.

Si la série (1) converge, sa somme est une fonction périodique $f(x)$ de période 2π, étant donné que $\sin nx$ et $\cos nx$ sont des fonctions périodiques de période 2π.

De sorte que

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Posons le problème suivant.

On se donne une fonction périodique $f(x)$ de période 2π. On demande pour quelles conditions imposées à $f(x)$ il existe une série trigonométrique convergeant vers $f(x)$.

Ce problème fera l'objet du présent chapitre.

Détermination des coefficients de la série au moyen des formules de Fourier. Supposons que la fonction $f(x)$, périodique et de période 2π, puisse être représentée par une série trigonométrique convergeant vers $f(x)$ dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, c'est-à-dire qu'elle soit la somme de cette série :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2}$$

Supposons que l'intégrale de la fonction du premier membre de cette égalité soit égale à la somme des intégrales des termes de la série (2). Ceci aura lieu, par exemple, si l'on suppose que la série

numérique formée avec les coefficients de la série trigonométrique proposée converge absolument, c'est-à-dire que converge la série numérique positive suivante

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\ldots+|a_n|+|b_n|+\ldots \qquad (3)$$

La série (1) est alors majorable et peut être intégrée terme à terme de $-\pi$ à π. Profitons-en pour calculer le coefficient a_0.

Intégrons les deux membres de l'égalité (2) de $-\pi$ à $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\,dx\right).$$

Calculons séparément chaque intégrale du second membre:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx=\pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\,dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{a_n\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\,dx=b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=-b_n\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\pi a_0,$$

d'où

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Pour calculer les autres coefficients de la série, nous calculerons préalablement les intégrales auxiliaires suivantes.

Si n et k sont des entiers et si $n\neq k$, on a

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx=0;\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx=0;\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx=0;\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

et si $n = k$,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi\ ; \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx\, dx = 0\ ; \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Calculons, par exemple, la première intégrale du groupe (I). Comme

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x],$$

on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x\, dx = 0.$$

On obtient d'une manière analogue les autres formules (I) *). En ce qui concerne les intégrales (II), elles se calculent directement (voir chap. X, t. I).

On peut calculer maintenant les coefficients a_k et b_k de la série (2).

Pour déterminer a_k, pour $k \neq 0$ donné, multiplions les deux membres de l'égalité (2) par $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \qquad (2')$$

La série du second membre de l'égalité est majorable, étant donné que ses termes ne sont pas supérieurs en valeur absolue aux termes de la série positive convergente (3). On peut donc l'intégrer terme à terme sur tout segment.

---

*) A l'aide des formules

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2}[\sin(n+k)x - \sin(n-k)x],$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2}[-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x].$$

Intégrons l'égalité (2') de $-\pi$ à π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right).$$

Eu égard aux formules (II) et (I), on voit que toutes les intégrales du second membre s'annulent, excepté celle contenant le coefficient a_k.

Par conséquent,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

d'où

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \tag{5}$$

Multipliant les deux membres de l'égalité (2) par $\sin kx$ et intégrant de nouveau de $-\pi$ à π, on trouve :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = b_k\pi,$$

d'où

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{6}$$

Les coefficients définis par les formules (4), (5) et (6) sont appelés les *coefficients de Fourier* de la fonction $f(x)$ et la série trigonométrique (1) formée avec ces coefficients est la *série de Fourier* de la fonction $f(x)$.

Retournons à présent au problème posé au début de ce paragraphe : quelles sont les propriétés que doit posséder la fonction $f(x)$ pour que sa série de Fourier converge et que sa somme soit égale aux valeurs de la fonction aux points considérés?

Nous allons énoncer un théorème donnant les conditions suffisantes pour que la fonction $f(x)$ soit représentable par une série de Fourier.

D é f i n i t i o n. Une fonction $f(x)$ est dite *monotone par tranches* sur le segment $[a, b]$ si l'on peut découper ce segment par des points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en un nombre fini d'intervalles (a, x_1), (x_1, x_2) . . . (x_{n-1}, b) de sorte que la fonction soit monotone dans

chaque intervalle, c'est-à-dire qu'elle soit ou bien non croissante, ou bien non décroissante.

Il résulte de la définition que si $f(x)$ est monotone par tranches et bornée sur le segment $[a, b]$, elle ne peut avoir que des points de discontinuité de première espèce. En effet, si $x = c$ est un point de discontinuité pour la fonction $f(x)$, on a, en vertu de la monotonie de la fonction,

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0),$$

c'est-à-dire que le point c est un point de discontinuité de première espèce (fig. 374).

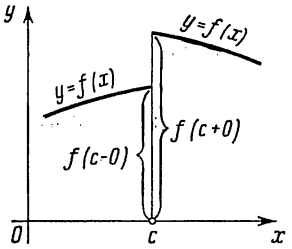


Fig. 374

Nous avons le théorème suivant :

Théorème. *Si la fonction périodique $f(x)$ de période 2π est monotone par tranches et bornée sur le segment $[-\pi, \pi]$, sa série de Fourier converge en tous les points. La somme de la série obtenue $s(x)$ est égale à la valeur de la fonction $f(x)$ aux points de continuité. Aux points de discontinuité de $f(x)$, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite ; c'est-à-dire si $x = c$ est un point de discontinuité de $f(x)$,*

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}.$$

Ce théorème montre que la classe des fonctions représentables par des séries de Fourier est assez large. C'est pourquoi les séries de Fourier ont trouvé une large application dans différentes branches de mathématiques. On utilise particulièrement avec succès les séries de Fourier en physique mathématique et dans ses applications à des problèmes concrets de mécanique et de physique (voir ch. XVIII).

Nous ne démontrerons pas le théorème qui vient d'être énoncé. Nous démontrerons aux §§ 8, 9, 10 un autre critère suffisant pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier. Il concerne, dans un certain sens, une classe plus restreinte de fonctions.

§ 2. Exemples de développement de fonctions en séries de Fourier

Donnons des exemples de développement de fonctions en séries de Fourier.

Exemple 1. On se donne une fonction périodique $f(x)$ de période 2π définie comme suit :

$$f(x) = x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Cette fonction est monotone par tranches et bornée (fig. 375). Elle admet donc un développement en série de Fourier.

On trouve en appliquant la formule (4) du § 1:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

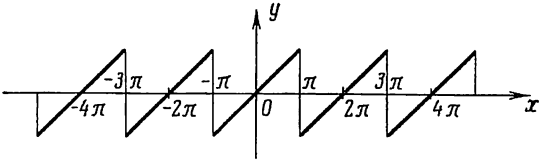


Fig. 375

Appliquons la formule (5) du § 1 et intégrons par parties:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=0.$$

On trouve d'après la formule (6) du § 1:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

On obtient ainsi la série

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}+\ldots\right].$$

Cette égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire à zéro.

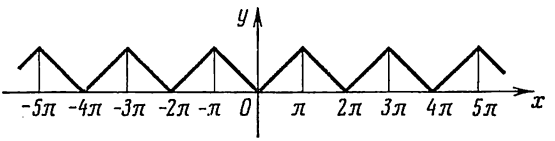


Fig. 376

E x e m p l e 2. On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit:

$$f(x)=-x \text{ pour } -\pi\leqslant x\leqslant 0,$$
$$f(x)=x \text{ pour } 0<x\leqslant\pi$$

(c'est-à-dire $f(x)=|x|$) (fig. 376). Cette fonction est monotone par tranches et bornée sur le segment $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Déterminons ses coefficients de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\pi,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx+\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=\frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0 \text{ pour } k \text{ pair},\\ -\dfrac{4}{\pi k^2} \text{ pour } k \text{ impair};\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin kx\,dx\right]=0.$$

On obtient donc la série

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}+\ldots\right]$$

Cette série converge partout et sa somme est égale à la fonction proposée.

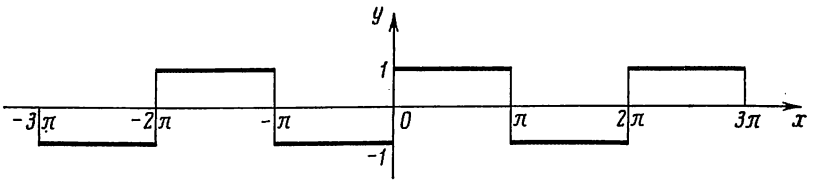


Fig. 377

Exemple 3. On définit une fonction périodique de période 2π comme suit:

$$f(x)=-1 \text{ pour } -\pi<x<0,$$
$$f(x)=1 \text{ pour } 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Cette fonction (fig. 377) est monotone par tranches et bornée sur le segment $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Calculons ses coefficients de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi}dx\right]=0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = -1\cdot\frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{0}^{\pi} = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}[1-\cos \pi k] = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \text{ pair,} \\ \dfrac{4}{\pi k} \text{ pour } k \text{ impair.} \end{cases}$$

La série de Fourier de la fonction considérée s'écrit donc

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \ldots\right].$$

Cette égalité est exacte partout sauf aux points de discontinuité.

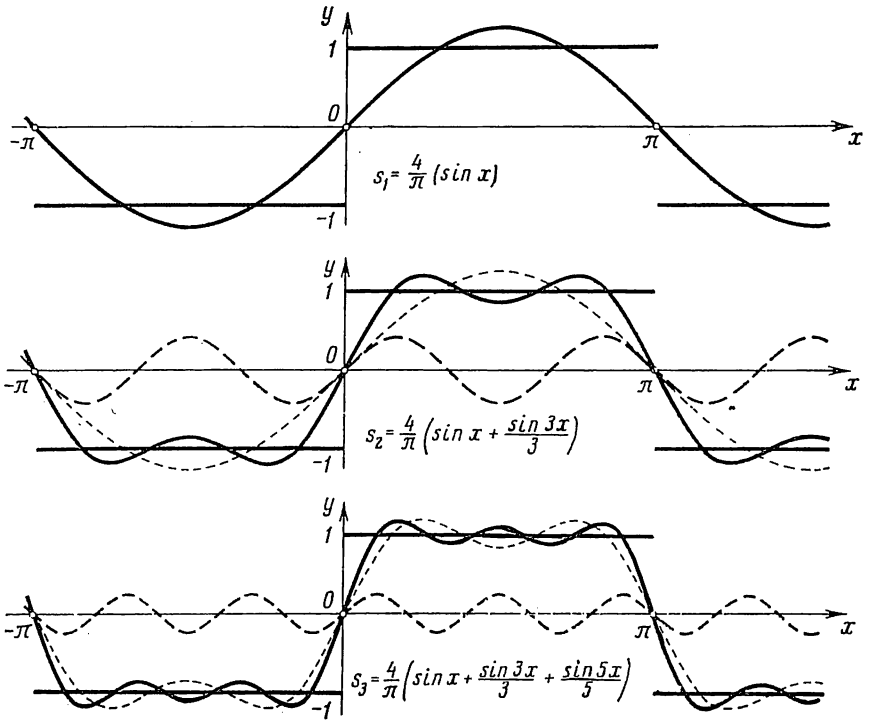


Fig. 378

Nous avons indiqué sur la figure 378 comment les sommes partielles s_n représentent avec une précision croissante la fonction $f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

Exemple 4. On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi \text{ (fig. 379).}$$

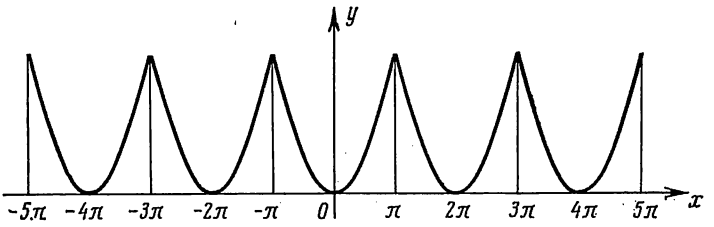


Fig. 379

Calculons ses coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = \frac{4}{\pi k^2}[\pi\cos k\pi] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{k^2} \text{ pour } k \text{ pair,} \\ -\dfrac{4}{k^2} \text{ pour } k \text{ impair;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] =$$

$$-\frac{2}{\pi k}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = 0$$

Donc la série de Fourier de la fonction donnée s'écrit

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right).$$

Comme la fonction est monotone par tranches, bornée et continue, l'égalité a lieu partout.

Posant dans l'égalité obtenue $x = \pi$, on obtient:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exemple 5. On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit:

$$f(x) = 0 \text{ pour } -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x) = x \text{ pour } \quad 0 < x \leqslant \pi \quad \text{(fig. 380).}$$

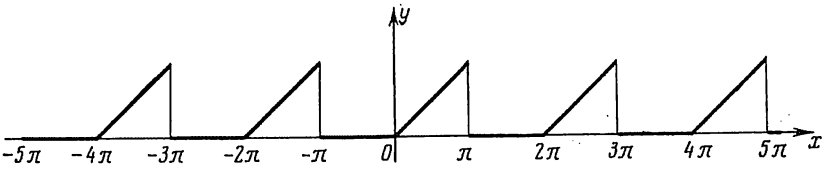


Fig. 380

Définissons les coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{pour } k \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{pour } k \text{ impair,} \\ -\dfrac{1}{k} & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier est

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Aux points de discontinuité de la fonction $f(x)$ la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite (dans le présent cas à $\frac{\pi}{2}$).

Posant dans l'égalité obtenue $x = 0$, on obtient:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

§ 3. Une remarque sur le développement des fonctions périodiques en séries de Fourier

Indiquons la propriété suivante d'une fonction périodique $\psi(x)$ de période 2π; on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx,$$

quel que soit le nombre λ.

En effet, comme

$$\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi),$$

posant $x = \xi - 2\pi$, on peut écrire, quels que soient c et d:

$$\int_{c}^{d} \psi(x)\,dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x)\,dx.$$

En particulier, posant $c = -\pi$, $d = \lambda$, on obtient:

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx,$$

par conséquent,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

La propriété mentionnée signifie : *l'intégrale d'une fonction périodique $\psi(x)$ sur un segment arbitraire de longueur égale à la période a toujours la même valeur.* Géométriquement: les aires hachurées sur la fig. 381 sont égales.

Il résulte de la propriété démontrée qu'on peut, dans le calcul des coefficients de Fourier, remplacer l'intervalle d'intégration $(-\pi, \pi)$ par l'intervalle $(\lambda, \lambda + 2\pi)$, c'est-à-dire que

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où λ est un nombre arbitraire.

Ceci résulte de ce que la fonction $f(x)$ est, par hypothèse, une fonction périodique de période 2π ; par suite, les fonctions $f(x)\cos nx$ et $f(x)\sin nx$ sont aussi des fonctions périodiques de période 2π. Montrons sur un exemple comment la propriété démontrée simplifie, dans certains cas, le calcul des coefficients.

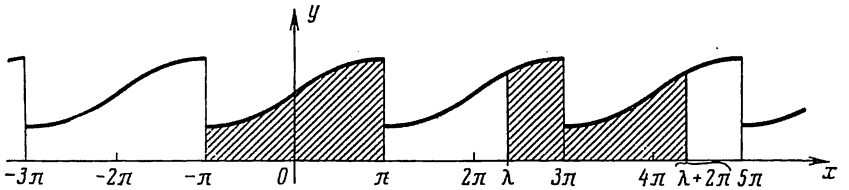


Fig. 381

E x e m p l e. Soit à développer en série de Fourier la fonction $f(x)$ de période 2π égale à x sur le segment $0 < x \leqslant 2\pi$. Le graphique de la fonction $f(x)$ est représenté sur la fig. 382. Cette fonction est donnée sur le segment $[-\pi,$

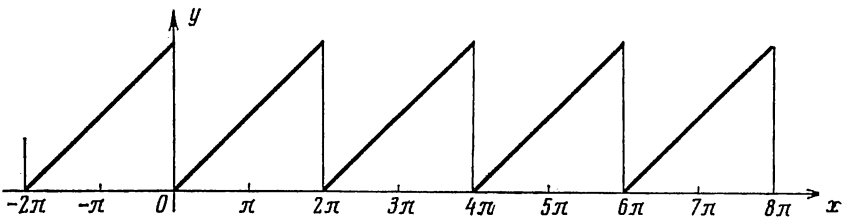


Fig. 382

$\pi]$ par deux formules: $f(x) = x + 2\pi$ sur le segment $[-\pi, 0]$ et $f(x) = x$ sur le segment $[0, \pi]$. Or, cette fonction est représentée très simplement par $f(x) = x$ sur le segment $[0, 2\pi]$. Par conséquent, on aura intérêt à développer cette fonction en série de Fourier en utilisant la formule (1) avec $\lambda = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}\,.$$

Par conséquent,

$$f(x) = \pi - 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x - \frac{2}{5}\sin 5x - .$$

Cette série représente la fonction donnée partout sauf aux points de discontinuité (les points $x = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$). En ces points, la somme de la série est égale à la demi-somme des valeurs limites de la fonction $f(x)$ à droite et à gauche (dans le cas présent à π).

§ 4. Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

Il résulte de la définition des fonctions paires et impaires que si $\psi(x)$ est paire, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

En effet,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \psi(-x)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx,$$

étant donné qu'une fonction paire jouit, par définition, de cette propriété : $\psi(-x) = \psi(x)$.

On a, d'une manière analogue, pour une fonction impaire $\varphi(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Si l'on a le développement de Fourier d'une fonction $f(x)$ impaire, le produit $f(x)\cos kx$ est une fonction impaire et $f(x)\sin kx$ une fonction paire ; donc,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

c'est-à-dire que la série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des sinus (voir exemple 1, § 2).

Si l'on a le développement de Fourier d'une fonction paire, le produit $f(x)\sin kx$ est une fonction impaire et $f(x)\cos kx$ est paire, par suite :

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

c'est-à-dire que la série de Fourier d'une fonction paire ne contient que des cosinus (voir exemple 2, § 2).

Les formules obtenues permettent de simplifier les calculs des coefficients de Fourier lorsque la fonction donnée est paire ou impaire. Il est évident que toute fonction périodique n'est pas forcément paire ou impaire (voir exemple 5, § 2).

Exemple. Soit à développer en série de Fourier la fonction paire $f(x)$ de période 2π, définie sur le segment $[0, \pi]$ par

$$y = x.$$

Nous avons déjà développé cette fonction en série de Fourier dans l'exemple 2, § 2 (voir fig. 376). Calculons de nouveau les coefficients de Fourier de cette fonction en utilisant la parité de cette fonction.

En vertu de la formule (2), $b_k = 0$, quel que soit k ;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \text{ pair}, \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} \text{ pour } k \text{ impair}. \end{cases}$$

Nous avons retrouvé les mêmes coefficients que dans l'exemple 2, § 2, mais plus rapidement.

§ 5. Séries de Fourier des fonctions de période $2l$

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période $2l$, en général différente de 2π. Développons-la en série de Fourier.

Faisons le changement de variable

$$x = \frac{l}{\pi}t.$$

La fonction $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ est alors une fonction périodique de t de période 2π, et on peut la développer en série de Fourier sur le segment $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{1}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos kt\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin kt\, dt.$$

Revenons maintenant à l'ancienne variable x:

$$x = \frac{l}{\pi}t, \quad t = x\frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l}dx.$$

On aura alors

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos k\frac{\pi}{l}x\, dx, \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin k\frac{\pi}{l}x\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La formule (1) devient

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

où les coefficients a_0, a_k, b_k sont calculés d'après les formules (2). Telle est la série de Fourier d'une fonction périodique de période $2l$.

Notons que tout ce qui a été dit sur les séries de Fourier des fonctions périodiques de période 2π reste en vigueur pour les fonctions périodiques de période quelconque $2l$. Le théorème sur le développement d'une fonction en série de Fourier du § 1 reste en vigueur, ainsi que les remarques sur la possibilité de calculer les coefficients de la série en intégrant sur un segment arbitraire de longueur égale à la période (voir § 3) et de simplifier le calcul des coefficients lorsque la fonction est paire ou impaire (§ 4).

Exemple. Développer en série de Fourier la fonction périodique de période $2l$ définie sur le segment $[-l; l]$ par l'égalité $f(x) = |x|$ (fig. 383).

Solution. Comme la fonction considérée est paire, on a

$$b_k = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \text{ pair}, \\ -\dfrac{4l}{\pi^2 k^2} \text{ pour } k \text{ impair}. \end{cases}$$

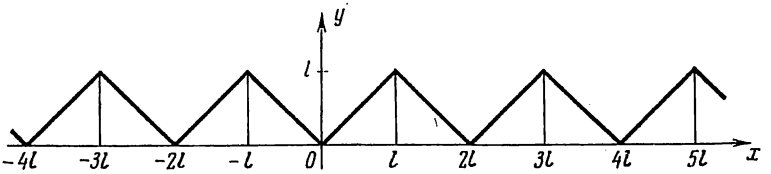


Fig. 383

Par conséquent, le développement s'écrit

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

§ 6. Sur le développement en série de Fourier d'une fonction non périodique

Soit donnée sur le segment $[a, b]$ une fonction monotone par tranches $f(x)$ (fig. 384). Montrons que cette fonction peut être représentée aux points de continuité par une série de Fourier. Consi-

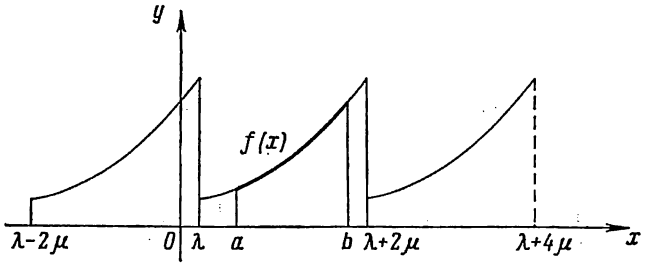


Fig. 384

dérons à cet effet une fonction arbitraire périodique monotone par tranches $f_1(x)$ de période $2\mu \geqslant |b - a|$ et coïncidant avec la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$. (Nous avons prolongé $f(x)$.)

Développons la fonction $f_1(x)$ en série de Fourier. La somme de cette série coïncide partout sur le segment $[a, b]$ (sauf aux points

de discontinuité) avec la fonction donnée $f(x)$, c'est-à-dire que l'on a développé $f(x)$ en série de Fourier sur le segment $[a, b]$.

Considérons ensuite l'important cas suivant. Soit $f(x)$ une fonction donnée sur le segment $[0, l]$. Prolongeant cette fonction arbitrairement sur le segment $[-l, 0]$ (tout en conservant la monotonie par tranches), nous pouvons développer cette fonction en série de Fourier. Si, notamment, l'on prolonge cette fonction sur le segment $-l \leqslant x < 0$ de sorte que $f(x) = f(-x)$, on obtient, en définitive,

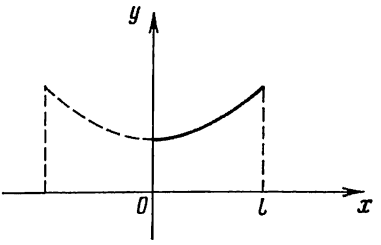


Fig. 385

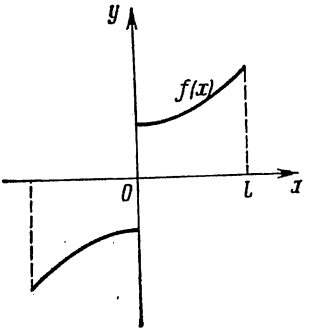


Fig. 386

une fonction paire (fig. 385). (On dit alors que la fonction $f(x)$ a été « prolongée de façon paire ».) Cette fonction se développe en série de Fourier de cosinus. De sorte que la fonction $f(x)$ donnée sur le segment $[0, l]$ a été développée en série de Fourier de cosinus.

Si l'on prolonge la fonction $f(x)$ sur $-l \leqslant x < 0$ de sorte que $f(x) = -f(-x)$, on obtient une fonction impaire, se développant en série de sinus (fig. 386). (Prolongement impair de la fonction $f(x)$.) Par conséquent, s'il est donné sur le segment $[0, l]$ une fonction monotone par tranches $f(x)$, on peut la développer ou bien en série de Fourier de cosinus, ou bien en série de Fourier de sinus.

Exemple 1. Soit à développer la fonction $f(x) = x$ sur le segment $[0, \alpha]$ en série de sinus.

Solution. Prolongeons cette fonction de façon impaire (fig. 375). On obtient la série

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right]$$

(voir exemple 1, § 2).

Exemple 2. Développer la fonction $f(x) = x$ sur le segment $[0, \pi]$ en série de cosinus.

Solution. Prolongeons cette fonction de façon paire, on a:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x \leqslant \pi$$

(fig. 376). Le développement en série de Fourier de cette dernière fonction est

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right]$$

(voir exemple 2, § 2). Par conséquent, on a sur le segment $[0, \pi]$ l'égalité

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right].$$

§ 7. Approximation en moyenne d'une fonction donnée au moyen de polynômes trigonométriques

La représentation d'une fonction en série (de Fourier, Taylor, etc.) a ce sens pratique que la somme partielle obtenue lorsqu'on se limite au n-ième terme est une expression approchée de la fonction que l'on développe. On peut pousser cette approximation au degré voulu en choisissant convenablement n. Toutefois, le caractère de la représentation approchée peut varier.

Ainsi, la somme s_n des n premiers termes de la série de Taylor coïncide avec la fonction donnée au point considéré et elle a en ce point des dérivées jusqu'au n-ième ordre coïncidant avec les dérivées de la fonction considérée. Un polynôme de Lagrange du n-ième degré (voir § 9, chap. VII, t. I) coïncide avec la fonction considérée en $n+1$ points.

Voyons quel est le caractère de l'approximation d'une fonction périodique $f(x)$ par des polynômes trigonométriques de la forme

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx+b_k \sin kx,$$

où $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ sont les coefficients de Fourier, c'est-à-dire que l'on approche avec la somme de n premiers termes de la série de Fourier de cette fonction. Faisons quelques remarques préliminaires.

Supposons que l'on ait une fonction $y=f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et que l'on veuille évaluer l'erreur commise lorsqu'on remplace cette fonction par une autre fonction $\varphi(x)$. On peut considérer, par exemple, que l'erreur est représentée par l'expression $\max|f(x)-\varphi(x)|$ sur le segment $[a, b]$, ce qu'on appelle encore l'*écart maximum* entre $f(x)$ et $\varphi(x)$. Mais il est parfois plus naturel de considérer l'*écart quadratique moyen* δ dont le carré est, par définition,

$$\delta^2=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx.$$

Expliquons sur la figure 387 la différence entre l'écart quadratique moyen et l'écart maximum.

Supposons la fonction $f(x)$ représentée par le trait plein et les approximations $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ par les pointillés. L'écart maximum de la courbe $y = \varphi_1(x)$ est plus petit que l'écart maximum de la courbe $y = \varphi_2(x)$, mais l'écart quadratique moyen de la première

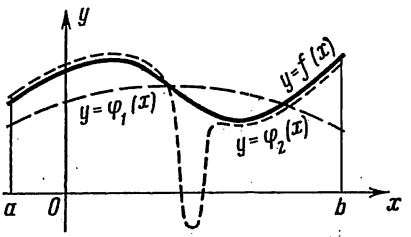


Fig. 387

courbe est plus grand que celui de la seconde, car la fonction $y = \varphi_2(x)$ se distingue notablement de $y = f(x)$ seulement dans un petit intervalle et, par conséquent, caractérise mieux la fonction $y = f(x)$ que la première.

Revenons à présent à notre problème.

Soit donnée une fonction $f(x)$ périodique de période 2π. Parmi tous les polynômes trigonométriques du n-ième degré

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

on demande de trouver, en choisissant convenablement les coefficients α_k et β_k, le polynôme dont l'écart quadratique moyen, défini par l'égalité

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx,$$

est minimum.

Le problème revient à trouver le minimum d'une fonction de $2n + 1$ variables $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Développons le carré de l'expression entre crochets et intégrons terme à terme, on obtient :

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(x) - 2f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] + \right.$$

$$+\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2\Big\}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-$$

$$-\frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jx\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jx\,dx.$$

Remarquons que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=a_0;\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=a_k;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=b_k$$

sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$.

En outre, en vertu des formules (I) et (II) du § 1, on a, lorsque $k=j$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi,$$

pour k et j quelconques : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos jx\,dx=0$

et, lorsque $k \neq j$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx \, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx \, dx = 0.$$

De sorte que

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) +$$

$$+ \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Ajoutons et retranchons la quantité

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2),$$

on a

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) +$$

$$+ \frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]. \tag{1}$$

Les trois premiers termes de cette somme ne dépendent pas du choix des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Les autres termes

$$\frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]$$

sont non négatifs. Leur somme est minimum (zéro) lorsque

$$\alpha_0 = a_0, \ \alpha_1 = a_1, \ \ldots, \ \alpha_n = a_n, \ \beta_1 = b_1, \ \ldots, \ \beta_n = b_n.$$

Tel est le choix des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ pour lequel le polynôme trigonométrique

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

s'écarte le moins de la fonction $f(x)$ en ce sens que l'écart quadratique moyen δ_n^2 est minimum.

Nous venons de démontrer le théorème :

Parmi tous les polynômes trigonométriques d'ordre n, c'est le polynôme dont les coefficients sont les coefficients de Fourier de la fonction

$f(x)$ qui donne la meilleure approximation quadratique moyenne de cette fonction.

L'écart quadratique moyen minimum est

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{2}$$

Comme $\delta_n^2 \geqslant 0$, on a, quel que soit n,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Il s'ensuit que la série du second membre converge lorsque $n \to \infty$ et l'on peut écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{3}$$

Cette relation est l'*inégalité de Bessel.*

Bornons-nous simplement à indiquer que, pour toute fonction bornée monotone par tranches, l'écart quadratique moyen obtenu lorsqu'on remplace cette fonction par une somme partielle de Fourier tend vers zéro quand $n \to \infty$: $\delta_n^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Mais alors, il résulte de la formule (2) l'égalité

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{3'}$$

dite *égalité de Liapounov-Parseval.* (Indiquons que cette égalité a été démontrée pour une classe de fonctions plus large que la classe envisagée ici.)

Il résulte de ce qui vient d'être démontré que, pour une fonction satisfaisant à l'égalité de Liapounov (notamment pour toute fonction bornée monotone par tranches), la série de Fourier correspondante donne un écart quadratique moyen nul.

R e m a r q u e. Etablissons une propriété des coefficients de Fourier, qui nous servira dans la suite. Donnons préalablement une définition.

Une fonction $f(x)$ est dite *continue par tranches* sur le segment $[a, b]$, si ses points de discontinuité de première espèce sont en nombre fini sur ce segment (ou si elle est partout continue).

Montrons la proposition suivante.

Si la fonction $f(x)$ est continue par tranches sur le segment $[-\pi, \pi]$, ses coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{4}$$

Démonstration. Si la fonction $f(x)$ est continue par tranches sur le segment $[-\pi, \pi]$, il en est de même de $f^2(x)$. Mais alors $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ existe et est un nombre fini *). Il résulte alors de l'inégalité de Bessel (3) que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge, ce qui entraîne que son terme général tend vers zéro : $\lim_{n\to\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$, les égalités (4) sont démontrées. On a ainsi pour une fonction bornée continue par tranches les égalités

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = 0.$$

Si la fonction $f(x)$ est périodique et de période 2π, on peut recopier ces dernières égalités comme suit (avec a arbitraire) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \cos nx\,dx = 0\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin nx\,dx = 0.$$

Remarquons que ces égalités subsistent si l'on intègre sur un segment $[a, b]$ quelconque, c'est-à-dire que les intégrales

$$\int_{a}^{b} f(x) \cos nx\,dx \quad \text{et} \quad \int_{a}^{b} f(x) \sin nx\,dx$$

tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini, si $f(x)$ est une fonction bornée continue par tranches.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que $b - a < 2\pi$, et considérons la fonction auxiliaire $\varphi(x)$ de période 2π définie comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad b < x \leqslant a + 2\pi.$$

Alors,

$$\int_{a}^{b} f(x) \cos nx\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x) \cos nx\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x) \sin nx\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x) \sin nx\,dx.$$

*) Cette intégrale est la somme des intégrales des différents morceaux de fonctions continues constituant la fonction $f(x)$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

Comme $\varphi(x)$ est une fonction bornée et continue par tranches, les intégrales des seconds membres tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. Il s'ensuit que les intégrales des premiers membres tendent aussi vers zéro. La proposition est ainsi démontrée et l'on a bien

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx\, dx = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\, dx = 0 \tag{5}$$

quels que soient a et b et la fonction $f(x)$ bornée et continue par tranches sur le segment $[a, b]$.

§ 8. Intégrale de Dirichlet

Nous allons établir dans ce paragraphe une formule exprimant les sommes partielles d'une série de Fourier au moyen d'une intégrale. Cette formule nous sera utile dans les paragraphes suivants.

Considérons une somme partielle de Fourier pour la fonction périodique $f(x)$ de période 2π:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

avec

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt.$$

Substituons ces expressions dans celle de $s_n(x)$, on obtient:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt + \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \right]$$

ou, en introduisant $\cos kx$ et $\sin kx$ sous le signe somme (ce qui est légitime, car $\cos kx$ et $\sin kx$ ne contiennent pas la variable d'intégration),

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \cos kt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \sin kt\, dt \right].$$

Mettons maintenant $\frac{1}{\pi}$ en facteur et remplaçons la somme des intégrales par l'intégrale de la somme, on a

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} [f(t) \cos kx \cos kt + f(t) \sin kx \sin kt] \right\} dt,$$

ou

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \qquad (1)$$

Transformons l'expression entre crochets. Posons

$$\sigma_n(z)=\frac{1}{2}+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos nz;$$

alors

$$2\sigma_n(z)\cos z=\cos z+2\cos z\cos z+2\cos z\cos 2z+\ldots$$
$$\ldots+2\cos z\cos nz=\cos z+(1+\cos 2z)+(\cos z+\cos 3z)+$$
$$+(\cos 2z+\cos 4z)+\ldots+[\cos(n-1)z+\cos(n+1)z]=$$
$$=1+2\cos z+2\cos 2z+\ldots$$
$$\ldots+2\cos(n-1)z+\cos nz+\cos(n+1)z$$

ou

$$2\sigma_n(z)\cos z=2\sigma_n(z)-\cos nz+\cos(n+1)z,$$

$$\sigma_n(z)=\frac{\cos nz-\cos(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

Or,

$$\cos nz-\cos(n+1)z=2\sin(2n+1)\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2},$$

$$1-\cos z=2\sin^2\frac{z}{2}.$$

Donc,

$$\sigma_n(z)=\frac{\sin(2n+1)\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

On peut donc recopier l'égalité (1) sous la forme

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Comme la fonction sous le signe somme est périodique (de période 2π), l'intégrale conserve la même valeur sur tout segment de longueur 2π. Il s'ensuit que

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Introduisons la nouvelle variable d'intégration α en posant

$$t-x=\alpha, \quad t=x+\alpha.$$

On obtient alors la formule

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{2}$$

L'intégrale du second membre est l'*intégrale de Dirichlet.*

Posons dans cette formule $f(x)\equiv 1$; alors $a_0=2$, $a_k=0$, $b_k=0$ lorsque $k>0$; donc, $s_n(x)=1$ quel que soit n, et l'on obtient l'identité

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha, \tag{3}$$

qui nous servira par la suite.

§ 9. Convergence d'une série de Fourier en un point donné

Supposons la fonction $f(x)$ continue par tranches sur le segment $[-\pi, \pi]$.

Multiplions les deux membres de l'identité (3) du paragraphe précédent par $f(x)$ et introduisons $f(x)$ sous le signe d'intégration, on obtient l'égalité

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Retranchons membre à membre cette égalité de l'égalité (2) du paragraphe précédent, on obtient :

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

On voit que la convergence de la série de Fourier vers la valeur de la fonction $f(x)$ au point donné dépend de la convergence vers zéro de l'intégrale du second membre lorsque $n\to\infty$.

Décomposons cette dernière intégrale en deux :

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\cos n\alpha\,d\alpha,$$

en utilisant la formule $\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2} = \sin n\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \cos n\alpha \times$ $\times \sin\frac{\alpha}{2}$. Décomposons la première intégrale du second membre de cette dernière égalité en trois :

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{1}{2} \cos n\alpha\, d\alpha.$$

Posons $\Phi_1(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{2}$. Comme $f(x)$ est bornée et continue par tranches, $\Phi_1(\alpha)$ sera également une fonction périodique de α, bornée et continue par tranches. Il s'ensuit que la dernière intégrale du second membre tend vers zéro lorsque $n \to \infty$, car c'est le coefficient de Fourier de cette fonction. La fonction

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

est bornée lorsque $-\pi \leqslant \alpha < -\delta$ et $\delta \leqslant \alpha \leqslant \pi$; on a

$$|\Phi_2(\alpha)| \leqslant [M + M] \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}.$$

où M est la borne supérieure de $|f(x)|$. En outre, la fonction $\Phi_2(\alpha)$ est aussi continue par tranches. Par conséquent, en vertu des formules (5) du § 7, la deuxième et la troisième intégrale tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$.

On peut écrire, par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(x) - f(x)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha\, d\alpha. \qquad (1)$$

L'intégration dans l'expression du second membre est étendue au segment $-\delta \leqslant \alpha \leqslant \delta$, donc l'intégrale dépend des valeurs de $f(x)$ seulement dans l'intervalle compris entre $x-\delta$ et $x+\delta$. On déduit de cette dernière égalité l'importante proposition : *la convergence de la série de Fourier au point considéré x dépend seulement du comportement de la fonction dans un voisinage arbitrairement petit de ce point.*

Tel est le contenu du *principe de localisation dans l'étude des séries de Fourier. Si deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ coïncident au voisinage d'un point x, leurs séries de Fourier convergent ou divergent en même temps en ce point.*

§ 10. Quelques conditions suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier

Nous avons démontré au paragraphe précédent que si une fonction $f(x)$ est continue par tranches sur le segment $[-\pi, \pi]$, la convergence de sa série de Fourier au point considéré x_0 vers la valeur

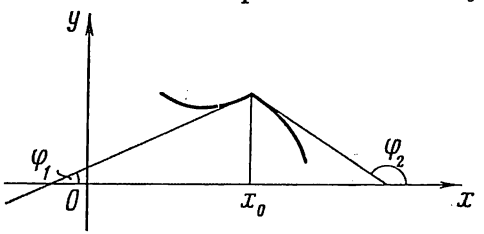


Fig. 388

$f(x_0)$ dépend seulement du comportement de la fonction dans un voisinage arbitrairement petit $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ de centre au point x_0.

Démontrons ensuite que *si la fonction $f(x)$ est, au voisinage de x_0, telle que les limites suivantes existent et sont finies*

$$\lim_{\alpha \to -0} \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} = k_1, \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} = k_2, \tag{2}$$

et si la fonction elle-même est continue au point x_0 (fig. 388), *la série de Fourier converge en ce point vers $f(x_0)$* *).

*) Si les conditions (1) et (2) sont vérifiées, on dit que $f(x)$ a au point x une dérivée à droite et une dérivée à gauche. On a représenté sur la figure 388 une fonction telle que $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, $k_1 \neq k_2$. Si $k_1 = k_2$, c'est-à-dire si les dérivées à droite et à gauche sont égales, la fonction est dérivable au point donné.

Démonstration. Considérons la fonction $\Phi_2(\alpha)$ du paragraphe précédent :

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x_0+\alpha) - f(x_0)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

comme la fonction $f(x)$ est continue par tranches sur le segment $[-\pi, \pi]$ et continue au point x_0, elle est, par conséquent, continue dans un certain voisinage $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ du point x_0. Donc la fonction $\Phi_2(\alpha)$ est continue en tous les points où $\alpha \neq 0$ et $|\alpha| \leqslant \delta$. La fonction $\Phi_2(\alpha)$ n'est pas définie pour $\alpha = 0$.

Cherchons les limites $\lim\limits_{\alpha\to 0-0} \Phi_2(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha\to 0+0} \Phi_2(\alpha)$ en utilisant les conditions (1) et (2) :

$$\lim_{\alpha\to 0-0} \Phi_2(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0-0} [f(x_0+\alpha) - f(x_0)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0-0} \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2} = \lim_{\alpha\to 0-0} \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} \times$$

$$\times \lim_{\alpha\to 0-0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \lim_{\alpha\to 0-0} \cos\frac{\alpha}{2} = k_1 \cdot 1 \cdot 1 = k_1.$$

Par conséquent, si l'on définit la fonction $\Phi_2(\alpha)$ en posant $\Phi_2(0) = k_1$, elle sera continue sur le segment $[-\delta, 0]$ ét, par suite, bornée. On démontre d'une manière analogue que

$$\lim_{\alpha\to 0+0} \Phi_2(\alpha) = k_2.$$

Donc la fonction $\Phi_2(\alpha)$ est bornée et continue dans l'intervalle $[0, \delta]$. Ainsi, la fonction $\Phi_2(\alpha)$ est bornée et continue par tranches sur le segment $[-\delta, \delta]$. Revenons à l'égalité (1) du § 9 (en désignant x par x_0) :

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0+\alpha) - f(x_0)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha$$

ou

$$\lim_{n\to\infty}[s(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_2(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha.$$

Eu égard aux formules (5) du § 7, on conclut que la limite du second membre est nulle, et donc

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=f(x_0).$$

Le théorème est démontré.

La différence entre le théorème démontré au § 1 et le théorème ci-dessus consiste en ce qui suit : on demandait dans le théorème du § 1 pour la convergence de la série de Fourier au point x_0 vers la valeur $f(x_0)$ que x_0 fût un point de continuité sur le segment $[-\pi, \pi]$ et que la fonction fût monotone par tranches, alors qu'on demande ici que la fonction soit continue au point x_0, qu'aient lieu les conditions (1) et (2) et que la fonction soit continue par tranches et bornée dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Il est évident que ces conditions sont différentes.

Remarque 1. Si une fonction continue par tranches est dérivable au point x_0, il est évident que les conditions (1) et (2) ont lieu et l'on a $k_1 = k_2$. Par conséquent, en un point de dérivabilité de la fonction $f(x)$, la série de Fourier converge vers la valeur de la fonction en ce point.

Remarque 2. 1°. La fonction considérée dans l'exemple 2 du § 2 (fig. 376) vérifie les conditions (1) et (2) aux points 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, . . . Elle est dérivable partout ailleurs. Donc la série de Fourier de cette fonction converge en chaque point vers la valeur de cette fonction.

2°. La fonction de l'exemple 4, § 2 (fig. 379) vérifie les conditions (1) et (2) aux points $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$. Elle est dérivable partout, donc représentable par une série de Fourier en chaque point.

3°. La fonction de l'exemple 1, § 2 (fig. 375) est discontinue aux points $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$. Elle est dérivable partout ailleurs, donc la série de Fourier converge vers la valeur de cette fonction partout sauf aux points de discontinuité. Aux points de discontinuité, la somme de la série de Fourier est égale à la moyenne arithmétique des valeurs limites de la fonction à gauche et à droite : elle est nulle dans le cas considéré.

§ 11. Analyse harmonique numérique

La théorie de la décomposition des fonctions en séries de Fourier est appelée *analyse harmonique*. Nous allons faire maintenant quelques remarques sur le calcul approché des coefficients de Fourier, c'est-à-dire sur l'analyse harmonique numérique.

Comme on le sait, les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ de période 2π sont définis par les formules

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,; \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Dans beaucoup de cas rencontrés en pratique, la fonction $f(x)$ est donnée soit sous forme de tableau (lorsque la dépendance fonctionnelle est obtenue expérimentalement), soit par une courbe tracée par un appareil. Le calcul des coefficients de Fourier se fait alors au moyen de méthodes d'intégration approchée (voir § 8, chap. XI, t. I).

Nous considérerons le segment $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ de longueur 2π. On peut toujours se ramener à ce cas en choisissant convenablement l'unité sur l'axe Ox.

Partageons le segment $[-\pi, \pi]$ en n parties égales par les points

$$x_0 = -\pi,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = \pi.$$

La longueur d'un segment partiel est alors

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}.$$

Désignons les valeurs de la fonction $f(x)$ aux points $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ par

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Nous prenons ces valeurs soit dans le tableau, soit sur la courbe de la fonction.

Utilisant, par exemple, la formule des rectangles (voir formule (1′), § 8, chap. XI, t. I), on détermine les coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos kx_i, \qquad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin kx_i.$$

Des schémas ont été élaborés, qui simplifient le calcul des coefficients de Fourier *). Nous ne pouvons pas ici nous arrêter sur les

*) Voir, par exemple, V. Smirnov « Cours de mathématiques supérieures », t. II.

détails, mais indiquons qu'il existe des appareils (dits analyseurs harmoniques) qui, d'après le graphique de la fonction donnée, permettent de calculer approximativement les coefficients de Fourier.

§ 12. Série de Fourier sous forme complexe

Soit la série de Fourier pour la fonction périodique $f(x)$ de période 2π :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx. \tag{1}$$

Exprimons $\cos nx$ et $\sin nx$ au moyen des exponentielles en nous référant aux formules (3), § 5, chap. VII, t. 1 :

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},$$

ce qui donne

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}, \qquad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=-i\,\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}.$$

Substituons $\cos nx$ et $\sin nx$ dans la formule (1) et procédons aux transformations nécessaires :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right). \tag{2}$$

Posons

$$\frac{a_0}{2}=c_0, \quad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n, \quad \frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n}. \tag{3}$$

La formule (2) prend alors la forme :

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}).$$

La dernière égalité peut être mise sous une forme plus compacte :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{4}$$

qui est la *forme complexe de la série de Fourier.*

Exprimons les coefficients c_n et c_{-n} par des intégrales. D'après les formules (4), (5) et (6) du § 1 on peut écrire les formules (3) sous

la forme :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Finalement

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx. \tag{5'}$$

De la même manière

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx. \tag{5''}$$

On peut grouper les formules (5′) et (5″) et l'expression de c_0 dans une même formule

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \tag{6}$$

c_n et c_{-n} sont les coefficients complexes de Fourier de la fonction $f(x)$.

Si la fonction $f(x)$ est périodique avec une période de $2l$, la série de Fourier de cette fonction est :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{7}$$

(cf. formule (3), § 5).

Il est évident que dans ce cas au lieu d'être exprimée par les formules (4) la forme complexe de la série de Fourier est exprimée par la formule

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}. \tag{8}$$

Les coefficients c_n de la série sont tirés des formules

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9}$$

Il est d'usage d'employer la terminologie suivante en électrotechnique et en radiotechnique. Les expressions de la forme $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ sont appelées *harmoniques*, les nombres $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \ldots$), *nombres d'onde* de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x}. \tag{10}$$

L'ensemble des nombres d'onde porte le nom de *spectre*. Si l'on porte ces nombres sur un axe numérique, on obtient un ensemble de points distincts. Cet ensemble de points est dit discret, et le spectre correspondant un *spectre discret*. Les coefficients c_n définis par les formules (9) portent le nom d'*amplitude complexe*. Notons que dans certains ouvrages d'électrotechnique et radiotechnique l'ensemble des modules des amplitudes $|c_n|$ porte également le nom de *spectre* de la fonction $f(x)$.

§ 13. Intégrale de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction définie dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et absolument intégrable dans cet intervalle, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = Q \tag{1}$$

existe.

Supposons en outre que $f(x)$ admet un développement en série de Fourier dans quelque intervalle $(-l, +l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{2}$$

où

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l}t\, dt. \tag{3}$$

Portant dans la série (2) les valeurs des coefficients a_k et b_k tirées des formules (3) on peut écrire:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\, dt\right)\cos\frac{k\pi}{l}x +$$

$$+ \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l}t\, dt\right)\sin\frac{k\pi}{l}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x + \sin\frac{k\pi}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x\right] dt$$

ou

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt. \tag{4}$$

Etudions le problème de la forme du développement (4) quand on passe à la limite pour $l\to\infty$.

Introduisons les notations suivantes:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l},\quad \alpha_2=\frac{2\pi}{l},\ \ldots,\quad \alpha_k=\frac{k\pi}{l},\ \ldots\ \text{et}\ \Delta\alpha_k=\frac{\pi}{l}. \tag{5}$$

En les portant dans (4) nous aurons:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,dt\right)\Delta\alpha_k. \tag{6}$$

Quand $l\to\infty$, le premier terme du second membre tend vers zéro. En effet

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt<\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt=\frac{1}{2l}Q\to 0.$$

Pour chaque valeur fixée de l l'expression entre parenthèses est une fonction de α_k (voir formules (5)) prenant ses valeurs de $\frac{\pi}{l}$ à ∞. Remarquons sans le démontrer que si la fonction $f(x)$ est monotone par tranches dans chaque intervalle fini, bornée dans l'intervalle infini et satisfait à la condition (1), la formule (6) prendra, si $l\to+\infty$, la forme

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \tag{7}$$

L'expression de droite est dite *intégrale de Fourier* de la fonction $f(x)$. L'égalité (7) a lieu pour tous les points où la fonction est continue. Aux points de discontinuité c'est l'égalité

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)dx=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{7'}$$

qui est vérifiée.

Transformons l'intégrale du second membre de l'égalité (7) en développant $\cos\alpha(t-x)$:

$$\cos\alpha(t-x)=\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x.$$

Portant cette expression dans la formule (7) et sortant $\cos\alpha x$ et $\sin\alpha x$ de sous le signe somme dans les intégrales où l'intégration

est réalisée en la variable t, nous obtenons

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{8}$$

Chacune des intégrales en t, situées entre parenthèses, existe, car la fonction $f(t)$ est absolument intégrable dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, de sorte que les fonctions $f(t)\cos\alpha t$ et $f(t)\sin\alpha t$ sont aussi absolument intégrables.

Considérons les cas particuliers de la formule (8).

1. Supposons que $f(x)$ soit paire. Dans ce cas $f(t)\cos\alpha t$ est une fonction paire et $f(t)\sin\alpha t$ une fonction impaire, de sorte que nous obtenons:

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt=2\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt=0.$$

Dans ce cas la formule (8) se met sous la forme

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{9}$$

2. Supposons que $f(x)$ soit impaire. En analysant la nature des intégrales de la formule (8) nous aurons dans ce cas:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{10}$$

Si la fonction $f(x)$ n'est définie que dans l'intervalle $(0, \infty)$, on peut la représenter pour $x>0$ aussi bien par la formule (9) que par la formule (10). Dans le premier cas nous la définissons complémentairement pour l'intervalle $(-\infty, 0)$ en posant que la fonction doit être paire et dans le second qu'elle doit être impaire.

Soulignons encore une fois qu'aux points présentant des discontinuités il convient de remplacer $f(x)$ dans les premiers membres des égalités (9) et (10) par l'expression

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Revenons à la formule (8). Les intégrales entre parenthèses sont des fonctions de α. Introduisons les notations :

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

On peut alors écrire la formule (8) sous la forme :

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha. \tag{11}$$

On dit que la formule (11) donne le développement de la fonction $f(x)$ en harmoniques de fréquence α variant d'une manière continue de 0 à ∞. La loi de la distribution des amplitudes et des phases initiales en fonction de la fréquence α est exprimée par les fonctions $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$.

Revenons à la formule (9). Posons

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt. \tag{12}$$

La formule (9) prend alors la forme

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{13}$$

La fonction $F(\alpha)$ est appelée la *transformée-cosinus de Fourier* de la fonction $f(x)$.

Si dans l'égalité (12) $F(\alpha)$ est la fonction donnée et $f(t)$ la fonction cherchée, elle sera alors une *équation intégrale* pour la fonction $f(t)$. La formule (13) donne la solution de cette équation.

Sur la base de la formule (10) on peut écrire les égalités suivantes :

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt, \tag{14}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Phi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{15}$$

La fonction $\Phi(\alpha)$ est appelée *transformée-sinus de Fourier* de la fonction $f(x)$.

Exemple. Soit

$$f(x)=e^{-\beta x} \quad (\beta>0,\ x\geqslant 0).$$

On détermine d'après la formule (12) la transformée-cosinus de Fourier:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}.$$

D'après la formule (14) on détermine la transformée-sinus de Fourier:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

A l'aide des formules (13) et (15) on obtient les relations réciproques:

$$\frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x}\ (x\geqslant 0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x}\ (x>0).$$

§ 14. Forme complexe de l'intégrale de Fourier

Dans l'intégrale de Fourier (formule (7), § 13) la fonction de α, se trouvant entre parenthèses, est paire et par conséquent elle est également déterminée pour les valeurs négatives de α. En vertu de ce que nous venons de dire, on peut recopier la formule (7) sous la forme:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \tag{1}$$

Considérons ensuite l'expression suivante identiquement nulle

$$\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0.$$

Le premier membre est identiquement égal à zéro, car la fonction de α entre parenthèses est une fonction impaire et l'intégrale d'une fonction impaire prise dans les limites de $-M$ à $+M$ est égale à zéro. Il est évident que

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0. \tag{2}$$

Remarque. On notera ici le fait suivant. L'intégrale convergente dans les limites infinies est définie comme suit:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{c}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\int_{c}^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{c}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\lim_{M\to\infty}\int_{c}^{M}\varphi(\alpha)\,d\alpha \tag{*}$$

à condition que chacune des limites du second membre existe (voir § 7, ch. XI, t. I). Or nous avons écrit dans l'égalité (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\varphi(\alpha)\,d\alpha. \tag{**}$$

Il se peut donc que la limite (**) existe alors que les limites du second membre de l'égalité (*) n'existent pas. L'expression du second membre de l'égalité (**) est appelée la *valeur principale de l'intégrale*. Ainsi nous considérons dans l'égalité (2) la valeur principale de l'intégrale impropre (extérieure). C'est dans ce sens que l'on doit comprendre les intégrales que nous rencontrerons dans ce paragraphe.

Multiplions les membres de l'égalité (2) par $-\frac{i}{2\pi}$ et ajoutons-les aux parties correspondantes de l'égalité (1), nous obtenons alors:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos\alpha(t-x)-i\sin\alpha(t-x)\right)dt\right]d\alpha$$

ou

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha(t-x)}\,dt\right]d\alpha. \tag{3}$$

C'est là précisément la *forme complexe de l'intégrale de Fourier.*

Recopions la formule (3) sous la forme:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt\right]e^{i\alpha x}\,d\alpha \tag{4}$$

ou

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \tag{5}$$

avec

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt. \tag{6}$$

La formule (5) rappelle la formule (10) du § 12; α est également appelé *nombre d'onde*, seulement qu'il prend ici toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et ∞. Le spectre des nombres d'onde est appelé *spectre continu*. On pourrait poursuivre l'analogie des formules (5) et (10). Si dans la formule (10) du § 12 au nombre d'onde α_n correspond une amplitude complexe c_n, on dit que dans la formule (5) aux nombres d'onde compris dans l'intervalle $(\alpha_1, \alpha_1 + \Delta\alpha)$ correspond une amplitude complexe $C(\alpha_1)$. La fonction $C(\alpha)$ est dite *densité spectrale* ou encore *fonction spectrale*. (Le terme densité est employé ici dans le même sens qu'au § 8, chap. XIV, où il a été question de densité de distribution dans un domaine bidimensionnel.)

L'égalité (4) peut être mise sous forme de deux équations:

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt, \tag{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha. \tag{8}$$

La fonction $F^*(\alpha)$ définie par la formule (7) est appelée la *transformée de Fourier* pour la fonction $f(x)$. La fonction $f(x)$ définie par la formule (8) est appelée la *transformée inverse de Fourier* pour la fonction $F^*(\alpha)$ (les transformations diffèrent par le signe de i). La fonction $F^*(\alpha)$ diffère de la fonction $C(\alpha)$ par le facteur constant $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Les transformations (7) et (8) entraînent les transformations (12), (14), (13) et (15) du § 13 (au facteur constant $\frac{1}{2}$ près). Les transformations (12) et (14) s'obtiennent par substitution dans (7) de

$$e^{-i\alpha t} = \cos \alpha t - i \sin \alpha t, \qquad F^*(\alpha) = F(\alpha) - i\Phi(\alpha)$$

et égalisation des parties réelles et imaginaires. De la même façon on obtient les transformations (13) et (15) à partir de la transformation (8).

Notons que dans le chap. XIX « Calcul opérationnel et applications » nous aurons recours à des transformations analogues à celles de Fourier.

§ 15. Série de Fourier suivant un système orthogonal de fonction

Définition 1. On dit que le système infini de fonctions

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots, \quad \varphi_n(x), \ldots \tag{1}$$

est *orthogonal sur le segment* $[a, b]$ si quel que soit $n \neq k$ on a

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

On suppose en outre que

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx \neq 0.$$

Exemple 1. Le système de fonctions

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{3}$$

est orthogonal sur le segment $[-\pi, \pi]$. Ceci découle des équations (I) et (II) du § 1.

Exemple 2. Le système de fonctions

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos 2\frac{\pi}{l}x, \sin 2\frac{\pi}{l}x, \ldots,$$

$$\cos n\frac{\pi}{l}x, \sin n\frac{\pi}{l}x, \ldots \tag{3'}$$

est orthogonal sur le segment $[-l, l]$. Une simple vérification permet de s'en assurer.

Exemple 3. Le système de fonctions

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos nx, \ldots \tag{4}$$

est orthogonal sur le segment $[0, \pi]$.

Exemple 4. Le système de fonctions

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots \tag{5}$$

est orthogonal sur le segment $[0, \pi]$.

On indiquera plus bas d'autres systèmes de fonctions orthogonales.

Soit une fonction $f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ telle qu'elle puisse être représentée par une série de fonctions du système orthogonal (1), convergente vers la fonction en question sur $[a, b]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \tag{6}$$

Déterminons les coefficients c_n. Supposons que la série obtenue après multiplication de la série (6) par une fonction $\varphi_k(x)$ quelconque soit intégrable par membre.

Multiplions les deux membres de l'égalité (6) par $\varphi_k(x)$ et intégrons de a à b. En tenant compte de l'égalité (2) nous obtenons

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = c_k \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx,$$

d'où il vient

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx}. \tag{7}$$

Les coefficients c_k calculés au moyen des formules (7) sont appelés *coefficients de Fourier* de la fonction $f(x)$ suivant le système de fonctions orthogonales (1); la série (6), *série de Fourier* suivant ce même système.

D é f i n i t i o n 2. On dit que le système orthogonal de fonctions

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots, \quad \varphi_n(x), \ldots$$

est complet si pour toute fonction $f(x)$ dont l'intégrale du carré est telle que

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < \infty$$

on a l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x)\right]^2 dx = 0. \tag{8}$$

En nous basant sur les définitions du § 7 on peut interpréter l'égalité (8) de la manière suivante. L'écart quadratique moyen entre la somme $\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x)$ et la fonction $f(x)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Si l'égalité (8) a lieu, on dit que la série de Fourier (6) converge *en moyenne* vers la fonction $f(x)$.

Il est évident que la convergence en moyenne n'implique pas la convergence en chaque point du segment $[a, b]$.

Notons sans le démontrer que les systèmes trigonométriques mentionnés dans les exemples 1 à 4 sont complets sur les segments respectifs.

Dans les applications on a très souvent recours au *système de fonctions de Bessel*

$$J_n(\lambda_1 x),\ J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\ J_n(\lambda_i x),\ \ldots \tag{9}$$

qui ont été étudiées dans le § 23 du chap. XVI. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i \ldots$ sont les *racines de la fonction de Bessel*, c'est-à-dire des nombres vérifiant la relation

$$J_n(\lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Indiquons sans le démontrer que le système de fonctions

$$\sqrt{x}\,J_n(\lambda_1 x),\quad \sqrt{x}\,J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\quad \sqrt{x}\,J_n(\lambda_i x),\ \ldots \tag{10}$$

est orthogonal sur le segment $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_j x)\, dx = 0\ ^{*)} \quad (k \neq j). \tag{11}$$

Dans les applications on utilise également les *systèmes de polynômes orthogonaux de Le Gendre* que l'on définit ainsi :

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ils vérifient les équations

$$(x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - n(n+1)\, y = 0.$$

On se sert aussi d'autres systèmes de polynômes orthogonaux.

§ 16. Notion d'espace fonctionnel linéaire. Analogie entre le développement de fonctions en séries de Fourier et la décomposition des vecteurs

En géométrie analytique un vecteur est défini comme suit dans un espace tridimensionnel :

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k},$$

où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ constituent un repère orthonormé. Dans la suite nous les désignerons par $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

---

*) Si les fonctions $\varphi_k(x)$, $\varphi_j(x)$ vérifient la relation

$$\int_a^b \rho(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_j(x)\, dx = 0 \quad (j \neq k),$$

on dit que les fonctions $\varphi_i(x)$ sont orthogonales avec un poids $\rho(x)$. Par conséquent, les fonctions $J_n(\lambda_i x)$ (pour $k \neq j$) sont orthogonales avec un poids x.

De la même manière on peut définir un vecteur dans un espace à n dimensions

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i e_i.$$

On appellera *espace euclidien* à *n dimensions* et on le notera par E_n l'ensemble des vecteurs de la forme A. Les vecteurs A constitueront les éléments ou points de l'espace euclidien à n dimensions *). Indiquons les propriétés de l'espace E_n.

Soient deux vecteurs appartenant à l'espace E_n :

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i e_i \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=1}^{n} B_i e_i.$$

Si C_1 et C_2 sont des nombres réels, par analogie avec l'espace tridimensionnel

$$C_1 A + C_2 B \tag{1}$$

est un vecteur appartenant également à l'espace E_n.

On appelle *produit scalaire* des vecteurs A et B l'expression

$$(AB) = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i. \tag{2}$$

Les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ appartenant à l'espace E_n, on peut leur appliquer la formule (2).

On obtient donc

$$\begin{aligned} &\text{lorsque } i \neq j \quad (e_i e_j) = 0, \\ &\text{et lorsque } i = j \quad (e_i e_i) = 1. \end{aligned} \tag{2'}$$

Les vecteurs dont le produit scalaire est nul sont dits *orthogonaux*. De sorte que les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont orthogonaux.

De même que dans un espace tridimensionnel il est aisé d'établir les propriétés suivantes du produit scalaire :

$$\left.\begin{aligned} &(AB) = (BA), \\ &(A + B, C) = (AC) + (BC), \\ &(\lambda A, B) = \lambda (A B). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La *longueur*, ou *module*, *du vecteur* A est définie comme dans un espace tridimensionnel

$$|A| = \sqrt{(AA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}. \tag{4}$$

*) On étudie également des vecteurs dans un espace à un nombre infini de dimensions.

Le module de la différence de deux vecteurs est naturellement défini ainsi :

$$|A-B|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(A_i-B_i)^2}. \tag{5}$$

En particulier,

$$|A-A|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(A_i-A_i)^2}=0.$$

L'*angle* φ formé par deux vecteurs est défini par la formule :

$$\cos\varphi=\frac{(AB)}{|A|\cdot|B|}. \tag{6}$$

Considérons l'ensemble des fonctions bornées monotones par tranches sur le segment $[a, b]$ *). Désignons cet ensemble par la lettre Φ et appelons-le *espace de fonctions* Φ. On appellera *éléments* ou *points* de l'espace Φ les fonctions appartenant à cet espace. On peut définir sur les fonctions de l'espace Φ des opérations analogues à celles établies pour les vecteurs de l'espace E_n.

Si C_1 et C_2 sont des nombres réels quelconques, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ des éléments de l'espace Φ, alors

$$C_1f_1(x)+C_2f_2(x) \tag{7}$$

est un élément de cet espace.

Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions de l'espace Φ, on appelle alors *produit scalaire des fonctions* $f(x)$ et $\varphi(x)$ l'expression

$$(f, \varphi)=\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Cette expression est analogue à l'expression (2). Il est aisé de vérifier que le produit scalaire (8) possède des propriétés identiques aux propriétés (3) établies pour les vecteurs

$$\left.\begin{aligned}&(f, \varphi)=(\varphi, f),\\&(f_1+f_2, \varphi)=(f_1, \varphi)+(f_2, \varphi),\\&(\lambda f, \varphi)=\lambda(f, \varphi).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Par analogie au module du vecteur (formule (4)) on définit ce qu'on appelle la *norme* de l'élément $f(x)$ de l'espace Φ :

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}=\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}. \tag{10}$$

*) Cette classe de fonctions a déjà fait l'objet d'une étude dans le théorème du § 1. On aurait pu certes examiner une classe plus vaste de fonctions, à laquelle s'appliqueraient toutes les assertions du § 1.

Par analogie à la formule (5) nous appellerons *distance entre les éléments* $f(x)$ et $\varphi(x)$ de l'espace Φ l'expression

$$\| f-\varphi \| = \sqrt{\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\, dx}. \tag{11}$$

L'expression (11) de la distance entre les éléments de l'espace Φ est appelée *métrique* de cet espace. Elle coïncide au facteur $\sqrt{b-a}$ près avec l'écart quadratique moyen δ, défini au § 7.

Il est évident que si $f(x) \equiv \varphi(x)$, autrement dit que $f(x)$ et $\varphi(x)$ coïncident en tous les points du segment $[a, b]$, alors $\| f - \varphi \| = 0$. Si, par contre, $\| f - \varphi \| = 0$, alors $f(x) = \varphi(x)$ en tous les points du segment $[a, b]$ sauf pour un nombre fini de points *). Dans ce cas on dit également des éléments de l'espace Φ qu'ils sont identiques.

On appelle *espace fonctionnel linéaire à métrique quadratique* un espace de fonctions bornées monotones par tranches muni des opérations (7), (8) et de la métrique définie par la relation (11). On appelle *points* de l'espace, ou *vecteurs*, les éléments de l'espace Φ.

Considérons la suite de fonctions

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{12}$$

appartenant à l'espace Φ.

On dit que la suite de fonctions (12) est *orthogonale sur le segment* $[a, b]$ si pour des valeurs arbitraires de i, j $(i \neq j)$ on a

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = 0. \tag{13}$$

De l'égalité (1) du § 1 il vient que, par exemple, le système de fonctions

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$$

est orthogonal sur le segment $[-\pi, \pi]$.

Montrons à présent que le développement d'une fonction en série de Fourier suivant des fonctions orthogonales est analogue à la décomposition d'un vecteur suivant des vecteurs orthogonaux. Soit le vecteur

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + \ldots + A_k e_k + \ldots + A_n e_n. \tag{14}$$

On suppose que les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que si $i \neq j$,

$$(e_i e_j) = 0. \tag{15}$$

Déterminons la projection A_k en multipliant scalairement les deux membres de l'égalité (14) par le vecteur e_k. D'après les pro-

*) Voire pour un nombre infini d'entre eux où $f(x) \neq \varphi(x)$.

priétés (2) et (3) nous obtenons:

$$(Ae_k) = A_1(e_1e_k) + A_2(e_2e_k) + \ldots + A_k(e_ke_k) + \ldots + A_n(e_ne_k).$$

De la relation (15) il vient

$$(Ae_k) = A_k(e_ke_k),$$

d'où

$$A_k = \frac{(Ae_k)}{(e_ke_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Supposons que la fonction $f(x)$ admette un développement suivant un système de fonctions orthogonales:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x). \tag{17}$$

En multipliant scalairement les deux membres de l'égalité (17) par $\varphi_k(x)$ et compte tenu de (9) et (13) nous avons *)

$$(f, \varphi_k) = a_k(\varphi_k, \varphi_k),$$

d'où il vient

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b [\varphi_k(x)]^2\,dx}. \tag{18}$$

La formule (18) est analogue à la formule (16). Posons

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x), \tag{19}$$

$$\delta_n = \| f - s_n \| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

le système de fonctions orthogonales (12) est *complet* sur le segment $[a, b]$.

La série de Fourier (17) converge *en moyenne* vers la fonction $f(x)$.

---

*) Nous supposons que toutes les séries de ce paragraphe sont convergentes et que l'intégration terme à terme est légitime.

Exercices

1. Développer en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la fonction

$$f(x) = x \text{ pour } -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x) = 2x \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Rép. $\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$
$$+ 3\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

2. Utiliser le développement en sinus de la fonction $f(x) = 1$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour calculer la somme de la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Rép. $\frac{\pi}{4}$.

3. Utiliser le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ pour calculer la somme de la série $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ Rép. $\frac{\pi^2}{12}$.

4. Développer en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la fonction $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$. Rép. $\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots$

5. Développer en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la fonction

$$f(x) = -\frac{(\pi + x)}{2} \text{ pour } -\pi \leqslant x < 0,$$
$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \text{ pour } 0 \leqslant x < \pi.$$

Rép. $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots$

6. Développer en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la fonction

$$f(x) = -x \text{ pour } -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x) = 0 \text{ pour } 0 < x \leqslant \pi.$$

Rép. $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$.

7. Développer en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la fonction

$$f(x) = 1 \text{ pour } -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x) = -2 \text{ pour } 0 < x \leqslant \pi.$$

Rép. $-\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

8. Développer la fonction $f(x) = x^2$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ en série de sinus.

Rép. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}[(-1)^n - 1]\right\}\sin nx$.

9. Développer la fonction $y = \cos 2x$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ en série de sinus.

Rép. $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2 - 1} + \frac{3\sin 3x}{2^2 - 3^2} + \frac{5\sin 5x}{2^2 - 5^2} + \ldots\right]$.

10. Développer la fonction $y = \sin x$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ en série de cosinus.

Rép. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\ldots\right]$.

11. Développer en série de Fourier la fonction $y = e^x$ dans l'intervalle $(-l, l)$.

Rép. $$\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+$$

$$+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}.$$

12. Développer la fonction $f(x) = 2x$ dans l'intervalle $(0, 1)$ en série de sinus.

Rép. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{n^2}$.

13. Développer la fonction $f(x) = x$ dans l'intervalle $(0, l)$ en série de sinus.

Rép. $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$.

14. Développer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ pour } 0 < x \leqslant 1, \\ 2-x \text{ pour } 1 < x < 2 \end{cases}$$

dans l'intervalle $(0, 2)$: a) en série de sinus; b) en série de cosinus.

Rép. a) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$;

b) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

Chapitre XVIII

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1. Principaux types d'équations de la physique mathématique

On appelle équations fondamentales de la physique mathématique (dans le cas d'une fonction de deux variables indépendantes) les équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre suivantes.

I. Equation des ondes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Nous sommes conduits à considérer cette équation dans l'étude des processus de vibrations transversales d'une corde, des vibrations longitudinales d'une tige, des oscillations du courant électrique dans un conducteur, des vibrations de torsion d'un arbre, des oscillations des gaz, etc. C'est l'équation du *type hyperbolique* la plus simple.

II. Equation de la chaleur ou équation de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Nous sommes conduits à l'étude de cette équation, une fois mis en présence de problèmes posés par les processus de diffusion de la chaleur, de filtration de liquides ou de gaz dans un milieu poreux (par exemple la filtration du pétrole et des gaz dans les grès sous couverture), de certains problèmes de la théorie des probabilités, etc. C'est l'équation du *type parabolique* la plus simple.

III. Equation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Nous sommes conduits à l'étude de cette équation, lorsque nous abordons les problèmes posés par les champs électriques et magnétiques, l'état stationnaire de chaleur, l'hydrodynamique, la diffusion, etc. C'est l'équation du *type elliptique* la plus simple.

Dans les équations (1), (2) et (3) la fonction à déterminer u dépend de deux variables. On peut également étudier les équations correspondantes au cas où la fonction à déterminer comporte un plus grand nombre de variables. Par exemple, l'équation des ondes dans le cas de trois variables indépendantes est de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1'}$$

l'équation de la chaleur dans le cas de trois variables indépendantes est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{2'}$$

l'équation de Laplace à trois variables indépendantes est de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{3'}$$

§ 2. Etablissement de l'équation pour des cordes vibrantes. Formulation du problème aux limites. Etablissement de l'équation pour des oscillations électriques dans un conducteur

En physique mathématique on entend par corde un fil flexible et élastique. Les tensions apparaissant dans la corde à un instant quelconque de temps sont dirigées suivant la tangente à son profil. Soit l la longueur de la corde qui, à l'instant initial, est dirigée suivant le segment de l'axe Ox de 0 à l. Supposons que les extrémités de la corde soient fixées aux points $x = 0$ et $x = l$. Si l'on écarte la corde de sa position initiale et puis qu'on la lâche ou si, sans écarter la corde, on imprime à ses points, à l'instant initial, une certaine vitesse ou encore si l'on écarte la corde en imprimant en même temps une certaine vitesse à ses points, les points de la corde seront alors animés d'un certain mouvement et on dira que la corde vibre. Le problème consiste à déterminer la forme de la corde pour tout instant arbitraire du temps et à déterminer la loi du mouvement de chacun de ses points en fonction du temps.

Nous ne considérons que les petits écarts des points de la corde par rapport à leur position initiale. On peut donc admettre que le mouvement des points de la corde s'effectue perpendiculairement à l'axe Ox et dans un même plan. Dans cette hypothèse le mouvement vibratoire de la corde est décrit par une seule fonction $u(x, t)$ qui donne le déplacement d'un point de la corde d'abscisse x à l'instant t (fig. 389).

Comme nous ne considérons que des petits écarts de la corde dans le plan (x, u), nous pouvons supposer que la longueur de l'élément $\widehat{M_1M_2}$ de la corde est égale à sa projection sur l'axe Ox, c'est-à-dire *) que $\widehat{M_1M_2} = x_2 - x_1$. Nous supposerons aussi que la tension est la même pour tous les points de la corde; désignons-la par T.

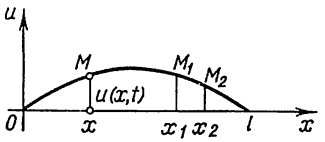


Fig. 389

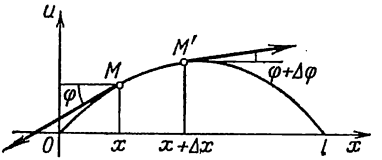


Fig. 390

Considérons l'élément MM' de la corde (fig. 390). Aux extrémités de cet élément agissent les forces T suivant la tangente à la corde. Supposons que les tangentes forment avec l'axe Ox les angles φ et $\varphi + \Delta\varphi$. La projection sur l'axe Ou des forces agissant sur l'élément MM' sera égale à $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin\varphi$. Comme l'angle φ est petit, on peut poser $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, et nous aurons:

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin\varphi \approx$$

$$\approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg}\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\Delta x, \quad 0 < \theta < 1$$

(nous avons appliqué ici le théorème de Lagrange à l'expression entre crochets).

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut égaler à la force d'inertie les forces extérieures appliquées à l'élément. Soit ρ la densité linéaire de la corde. La masse de l'élément de la corde sera o Δx. L'accélération de l'élément est $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Par conséquent, nous aurons en vertu du principe de d'Alembert:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

*) Cette hypothèse équivaut à négliger la quantité $u_x'^2$ par rapport à 1 En effet,

$$\widehat{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x'^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(1+\frac{1}{2}u_x'^2 - \ldots\right)dx \approx \int_{x_1}^{x_2}dx = x_2 - x_1.$$

Simplifiant par Δx et posant $\frac{T}{\rho} = a^2$ nous obtenons l'équation du mouvement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Nous avons obtenu l'expression dite *équation des ondes* qui est l'équation des cordes vibrantes. Pour déterminer complètement le mouvement de la corde la seule équation (1) ne suffit pas. La fonction à déterminer $u(x, t)$ doit encore satisfaire aux *conditions aux frontières* indiquant ce qui se produit aux extrémités de la corde ($x = 0$ et $x = l$) et aux *conditions initiales* décrivant l'état de la corde à l'instant initial ($t = 0$). Par *conditions aux limites* on entend l'ensemble des conditions aux frontières et des conditions initiales.

Supposons par exemple que, comme nous l'avons admis, les extrémités de la corde pour $x = 0$ et $x = l$ soient immobiles. Alors pour tout t doivent être vérifiées les égalités :

$$u(0, t) = 0, \tag{2'}$$

$$u(l, t) = 0. \tag{2''}$$

Ces égalités constituent les *conditions aux frontières* pour notre problème.

A l'instant initial $t = 0$ la corde possède la forme que nous lui avons donnée. Supposons que cette forme soit définie par la fonction $f(x)$. On doit ainsi avoir

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x). \tag{3'}$$

On doit en outre fixer la vitesse à l'instant initial en chaque point de la corde, qui est déterminée par la fonction $\varphi(x)$. Ainsi on doit avoir

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{3''}$$

Les conditions (3′) et (3″) sont les *conditions initiales.*

R e m a r q u e. En particulier on peut avoir $f(x) \equiv 0$ et $\varphi(x) \equiv 0$. Si ces conditions sont réalisées, la corde est au repos et, par conséquent, $u(x, t) \equiv 0$.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous sommes conduits à l'équation (1) par les problèmes posés dans le cas des oscillations électriques dans les conducteurs. Examinons ce cas. Le courant électrique dans un conducteur est caractérisé par l'intensité $i(x, t)$ et la tension $v(x, t)$, qui dépendent de la coordonnée x du point du conducteur et du temps t. Considérant un élément de conducteur Δx, nous pouvons écrire que la chute de tension dans l'élément Δx est égale à $v(x, t) - v(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$. Cette chute de

tension est constituée par la tension ohmique égale à $iR\,\Delta x$ et la tension inductive égale à $\frac{\partial i}{\partial t}\,L\,\Delta x$. Donc

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\,\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}\,L\,\Delta x, \tag{4}$$

où R et L sont respectivement la résistance et l'inductance, calculées pour l'unité de longueur du conducteur. Le signe moins indique que le sens du courant est opposé à l'accroissement de v. Divisant par Δx, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

La différence des intensités du courant entrant et sortant de l'élément Δx au cours du temps Δt sera

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\,\Delta t.$$

Elle est dépensée pour la charge de l'élément égale à $C\,\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\,\Delta t$ et pour la fuite par la surface latérale du conducteur due à l'imperfection de l'isolation, égale à $Av\,\Delta x\,\Delta t$ (A désigne ici le coefficient de fuite). En égalant ces expressions et en divisant par $\Delta x\,\Delta t$ nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0. \tag{6}$$

On convient d'appeler les équations (5) et (6) *équations du télégraphe*.

On peut tirer du système d'équations (5) et (6) une équation ne contenant que la fonction inconnue $i(x, t)$ et une équation ne contenant que la fonction inconnue $v(x, t)$. Dérivons les termes de l'équation (6) par rapport à x, les termes de l'équation (5) par rapport à t et multiplions-les par C. En retranchant l'une de l'autre nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\frac{\partial v}{\partial x} - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0.$$

Remplaçant dans cette dernière équation $\frac{\partial v}{\partial x}$ par son expression tirée de l'équation (5) nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\left(-iR - L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi. \tag{7}$$

D'une manière analogue on obtient une équation déterminant $v(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv. \tag{8}$$

Si l'on peut négliger la fuite de courant par l'isolation ($A = 0$) et la résistance ($R = 0$), les équations (7) et (8) se ramènent à des équations des ondes :

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \qquad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

où l'on a désigné $a^2 = \frac{1}{CL}$. Les conditions aux frontières et initiales sont formulées pour le problème en tenant compte des conditions physiques.

§ 3. Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de séparation des variables (méthode de Fourier)

La méthode de séparation des variables (ou méthode de Fourier) que nous allons considérer est typique pour la résolution de nombreux problèmes de physique mathématique. Soit à trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

satisfaisant aux conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(l, t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5}$$

Nous chercherons une solution particulière (non identiquement nulle) de l'équation (1) satisfaisant aux conditions aux frontières (2) et (3) sous forme de produit de deux fonctions $X(x)$ et $T(t)$ dont la première ne dépend que de x et la seconde que de t :

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{6}$$

Effectuant cette substitution dans l'équation (1) nous obtenons : $X(x)\,T''(t) = a^2X''(x)\,T(t)$ et divisant les termes de l'égalité par a^2XT

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}. \tag{7}$$

Le premier membre de cette égalité est une fonction qui ne dépend pas de x, et le second une fonction qui ne dépend pas de t. L'égalité (7) ne peut avoir lieu que dans le cas où le premier comme le second membre ne dépendent ni de x ni de t, autrement dit sont égaux à un nombre constant. Désignons-le par $-\lambda$, où $\lambda > 0$ (nous considérerons plus loin le cas $\lambda < 0$). Donc,

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Nous obtenons de ces égalités deux équations:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{9}$$

Les solutions générales de ces équations sont (cf. ch. XIII, § 21):

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x, \tag{10}$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t, \tag{11}$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires.

Portant les expressions de $X(x)$ et de $T(t)$ dans l'égalité (6) nous obtenons:

$$u(x, t) = \left(A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x\right)\left(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t\right).$$

Choisissons maintenant les constantes A et B de sorte que soient vérifiées les conditions (2) et (3). Comme $T(t) \not\equiv 0$ (dans le cas contraire nous aurions $u(x, t) \equiv 0$, ce qui contredit notre hypothèse), la fonction $X(x)$ doit vérifier les conditions (2) et (3), c'est-à-dire que l'on doit avoir $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Portant les valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'égalité (10) nous obtenons en vertu de (2) et (3):

$$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0,$$

$$0 = A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l.$$

La première équation nous donne $A = 0$ et la seconde:

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

$B \neq 0$, car dans le cas contraire nous aurions $X \equiv 0$ et $u \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, on doit avoir

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

d'où

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

(nous ne prenons pas la valeur $n = 0$, car dans ce cas nous aurions $X \equiv 0$ et $u \equiv 0$). Nous obtenons ainsi:

$$X = B\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{13}$$

Les valeurs trouvées de λ sont appelées *valeurs propres* pour le problème aux limites donné. Les fonctions $X(x)$ correspondantes sont appelées *fonctions propres*.

Remarque. Si nous avions pris au lieu de $-\lambda$ l'expression $+\lambda = k^2$, l'équation (8) serait de la forme

$$X'' - k^2 X = 0.$$

La solution générale de cette équation est :

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Une solution non nulle dans le cas d'une équation de cette forme ne peut vérifier les conditions aux frontières (2) et (3).

Connaissant $\sqrt{\lambda}$ nous pouvons en utilisant l'égalité (11) écrire :

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\sin\frac{an\pi}{l}t \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Pour chaque valeur de n, et par conséquent pour chaque λ, portons les expressions (13) et (14) dans l'égalité (6), nous obtenons la solution de l'équation (1) vérifiant les conditions aux frontières (2) et (3). Désignons cette solution par $u_n(x, t)$:

$$u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right). \tag{15}$$

Pour chaque valeur de n nous pouvons choisir les constantes C et D et c'est pourquoi nous écrivons C_n et D_n (la constante B est incluse dans C_n et D_n). Comme l'équation (1) est linéaire et homogène, la somme des solutions est aussi une solution et c'est pourquoi la fonction représentée par la série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

ou

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{16}$$

est aussi une solution de l'équation différentielle (1) qui vérifie les conditions aux frontières (2) et (3). Il est évident que la série (16) ne sera la solution de l'équation (1) que dans le cas où les coefficients C_n et D_n sont tels que cette série converge et que convergent les séries obtenues après dérivation terme à terme par rapport à x et à t.

La solution (16) doit encore satisfaire aux conditions initiales (4) et (5). Nous l'obtiendrons par un choix adéquat des constantes C_n et D_n. Posant dans l'égalité (16) $t = 0$, nous obtenons (cf. la

condition (4)) :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{17}$$

Si la fonction $f(x)$ est telle qu'on peut la développer en série de Fourier (cf. § 1, ch. XVII) dans l'intervalle $(0, l)$, la condition (17) sera vérifiée si l'on pose

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx. \tag{18}$$

Puis en dérivant les termes de l'égalité (16) par rapport à t et posant $t = 0$ nous obtenons en vertu de la condition (5) l'egalité

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Déterminons les coefficients de Fourier de cette série :

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

ou

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx. \tag{19}$$

Nous avons ainsi démontré que la série (16) dont les coefficients C_n et D_n sont déterminés par les formules (18) et (19) représente, si elle est doublement dérivable terme à terme, la fonction $u(x, t)$ qui est la solution de l'équation (1) et vérifie les conditions aux frontières et initiales (2)-(5).

R e m a r q u e. Résolvant le problème considéré pour l'équation des ondes par une autre méthode on peut démontrer que la série (16) est également la solution dans le cas où elle n'est pas dérivable terme à terme. La fonction $f(x)$ doit alors être deux fois dérivable et $\varphi(x)$ une fois dérivable.

§ 4. Equation de la propagation de la chaleur dans une barre. Enoncé du problème aux limites

Considérons une barre homogène de longueur l. Nous supposerons que les pertes sont éliminées par isolation thermique de la surface latérale de la barre et qu'en chaque point de sa section transversale

la température est identique. Etudions le processus de propagation de la chaleur dans la barre.

Disposons l'axe Ox de sorte que l'une des extrémités de la barre coïncide avec le point $x = 0$ et l'autre avec le point $x = l$ (fig. 391). Soit $u(x, t)$ la température dans la section de la barre d'abscisse x à l'instant t. On a établi expérimentalement que la vitesse de propagation de la chaleur, c'est-à-dire la quantité de chaleur pénétrant

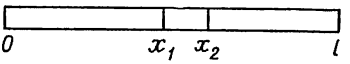


Fig. 391

par la section d'abscisse x au cours d'un intervalle de temps unité, est donnée par la formule

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{1}$$

où S désigne l'aire de la section de la barre considérée, k le coefficient de conduction thermique *).

Considérons l'élément de la barre, compris entre les sections d'abscisses x_1 et x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta x$). La quantité de chaleur passant par la section d'abscisse x_1 au cours du temps Δt sera

$$\Delta Q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} S\,\Delta t, \tag{2}$$

de même pour la section d'abscisse x_2 :

$$\Delta Q_2 = -k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} S\,\Delta t. \tag{3}$$

L'apport de chaleur $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ dans l'élément de la barre au cours du temps Δt sera égal à

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} S\,\Delta t\right] - \left[-k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} S\,\Delta t\right] \approx$$
$$\approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S\,\Delta t \tag{4}$$

(nous avons appliqué le théorème de Lagrange à la différence $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}$). Cet apport de chaleur au cours du temps Δt

*) La vitesse de propagation de la chaleur, ou la vitesse du flux de chaleur, est donnée par:

$$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

où ΔQ désigne la quantité de chaleur passant par la section S au cours du temps Δt.

est dépensé pour élever la température de l'élément de la barre de la quantité Δu :

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\ \Delta x\ S\ \Delta u$$

ou

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \tag{5}$$

où c désigne la capacité calorifique de la substance de la barre, ρ la densité de la substance de la barre ($\rho\ \Delta x\ S$ est la masse de l'élément de la barre).

En égalant les expressions (4) et (5) de la même quantité de chaleur $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ nous obtenons :

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S\ \Delta t = c\rho\ \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Désignant $\frac{k}{c\rho} = a^2$, nous obtenons en définitive :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

C'est là l'équation de la *propagation de la chaleur* (*équation de la chaleur*) dans une barre homogène.

Pour que la solution de l'équation (6) soit entièrement déterminée, la fonction $u\ (x,\ t)$ doit vérifier les conditions aux limites, correspondant aux conditions physiques du problème. Les conditions aux limites pour la solution de l'équation (6) peuvent être diverses. Les conditions correspondant au *premier problème aux limites* pour $0 \leqslant t \leqslant T$ sont les suivantes :

$$u\ (x,\ 0) = \varphi\ (x), \tag{7}$$

$$u\ (0,\ t) = \psi_1\ (t), \tag{8}$$

$$u\ (l,\ t) = \psi_2\ (t). \tag{9}$$

Du point de vue physique la condition (7) (*condition initiale*) correspond à ce que pour $t = 0$ la température dans les différentes sections de la barre est donnée égale à $\varphi\ (x)$. Les conditions (8) et (9) (*conditions aux frontières*) correspondent au fait qu'aux extrémités de la barre pour $x = 0$ et $x = l$ on maintient une température égale respectivement à $\psi_1\ (t)$ et $\psi_2\ (t)$.

On démontre au § 6 que l'équation (6) a une solution unique dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ vérifiant les conditions (7), (8), (9).

§ 5. Propagation de la chaleur dans l'espace

Considérons le processus de propagation de la chaleur dans l'espace à trois dimensions. Soit $u(x, y, z, t)$ la température au point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t. On a établi empiriquement que la vitesse de passage de la chaleur par la surface Δs, c'est-à-dire la quantité de chaleur débitée durant l'unité de temps, est déterminée par la formule (analogue à la formule (1) du paragraphe précédent)

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s, \tag{1}$$

où k désigne le coefficient de conduction thermique du milieu considéré que nous supposons homogène et isotrope, $\boldsymbol{n}$ le vecteur unité orienté suivant la normale à la surface Δs dans le sens de la propagation de la chaleur. En vertu du § 14, ch. VIII, t. I nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs du vecteur $\boldsymbol{n}$, ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n} \operatorname{grad} u.$$

Portant l'expression $\frac{\partial u}{\partial n}$ dans la formule (1) nous obtenons :

$$\Delta Q = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, \Delta s.$$

La quantité de chaleur, passant au cours du temps Δt par la surface Δs, sera égale à :

$$\Delta Q \, \Delta t = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, \Delta t \, \Delta s.$$

Revenons au problème que nous avons posé au début de ce paragraphe. Dans le milieu considéré isolons un petit volume V limité par la surface S.

La quantité de chaleur s'écoulant par la surface S sera

$$Q = -\Delta t \iint_S k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, ds, \tag{2}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité orienté suivant la normale extérieure à la surface S.

On voit que la formule (2) donne la quantité de chaleur pénétrant dans le volume V (ou quittant le volume V) au cours du temps Δt. La quantité de chaleur pénétrant dans le volume V sert à réchauffer la substance de ce volume.

Considérons un volume élémentaire Δv. Supposons qu'au cours du laps de temps Δt sa température soit élevée de Δu. Il est évident

que la quantité de chaleur dépensée pour élever la température de l'élément Δv sera égale à

$$c\,\Delta v\rho\,\Delta u \approx c\Delta v\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t,$$

où c est la capacité calorifique de la matière et ρ la densité. La quantité globale de chaleur dépensée à l'échauffement dans le volume V au cours du temps Δt sera

$$\Delta t \iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv.$$

Mais c'est la quantité de chaleur débitée dans le volume V au cours du temps Δt, elle est déterminée par la formule (2). Nous avons ainsi l'égalité

$$-\Delta t \iint\limits_S kn \operatorname{grad} u\, ds = \Delta t \iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv.$$

Divisant par Δt nous obtenons :

$$-\iint\limits_S kn \operatorname{grad} u\, ds = \iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv. \tag{3}$$

L'intégrale de surface du premier membre de cette équation peut être transformée d'après la formule d'Ostrogradsky (cf. § 8, ch. XV) en posant $\boldsymbol{F} = k \operatorname{grad} u$:

$$\iint\limits_S (k \operatorname{grad} u)\,\boldsymbol{n}\, ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv.$$

Remplaçant l'intégrale double du premier membre de l'égalité (3) par une intégrale triple nous obtenons :

$$-\iiint\limits_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv = \iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv$$

ou

$$\iiint\limits_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right] dv = 0. \tag{4}$$

Appliquant le théorème de la moyenne à l'intégrale triple du premier membre (cf. § 12, ch. XIV), nous obtenons :

$$\left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1} = 0, \tag{5}$$

où $P\,(x_1, y_1, z_1)$ est un point du volume V.

Comme nous pouvons considérer un volume arbitraire V dans l'espace à trois dimensions, où s'effectue la propagation de la chaleur,

et comme nous supposons que la fonction sous le signe d'intégration dans l'égalité (4) est continue, l'égalité (5) sera vérifiée en chaque point de l'espace. Ainsi

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u). \tag{6}$$

Mais

$$k \operatorname{grad} u = k\frac{\partial u}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + k\frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + k\frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$$

et

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(cf. § 8, ch. XV). Portant dans l'équation (6) nous aurons:

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Si k est une constante, alors

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

et l'équation (6) donne dans ce cas

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ou, en posant $-\frac{k}{c\rho} = a^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{8}$$

Sous une forme condensée l'équation (8) s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace.

L'équation (8) est *l'équation de la propagation de la chaleur dans l'espace à trois dimensions.* Pour trouver sa solution unique satisfaisant au problème posé il faut se donner les conditions aux limites.

Supposons que nous ayons un corps Ω dont la surface est σ. On considère dans ce corps le processus de propagation de la chaleur. A l'instant initial la température du corps est donnée. Cela correspond à ce que l'on connaît les valeurs de la solution pour $t = 0$, autrement dit les *conditions initiales*:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{9}$$

En outre on doit connaître la température en tout point M de la surface σ du corps en tout instant t, les *conditions aux frontières*:

$$u(M, t) = \psi(M, t). \tag{10}$$

(D'autres conditions aux frontières sont possibles.)

Si la fonction recherchée $u(x, y, z, t)$ ne dépend pas de z, cela correspond à ce que la température ne dépend pas de z, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

dite *équation de la propagation de la chaleur dans le plan*. Si l'on considère la propagation de la chaleur dans un domaine plan D de frontière C, les conditions aux limites de même que (9) et (10) sont alors:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$u(M, t) = \psi(M, t),$$

où φ et ψ sont des fonctions données, M un point de la frontière C.

Si la fonction u ne dépend ni de z ni de y, nous obtenons l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dite *équation de la propagation de la chaleur dans une barre*.

§ 6. Résolution du premier problème aux limites pour l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies

De même que pour le cas des équations différentielles ordinaires, lors de la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, les dérivées sont remplacées par les différences correspondantes (cf. fig. 392):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h}\right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}; \tag{2}$$

d'une manière analogue

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u(x, t+l) - u(x, t)}{l}. \tag{3}$$

Le premier problème aux limites pour l'équation de la chaleur (cf. § 4) s'énonce de la manière suivante. On demande de trouver

la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

vérifiant les conditions aux limites:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{5}$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

c'est-à-dire de trouver la solution $u(x, t)$ dans le rectangle délimité par les droites $t = 0$, $x = 0$, $x = L$, $t = T$ si l'on connaît les valeurs

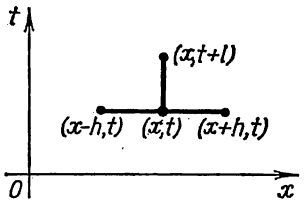


Fig. 392

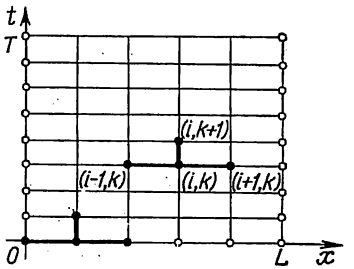


Fig. 393

de la fonction recherchée sur trois de ses côtés: $t = 0$, $x = 0$, $x = L$ (fig. 393). Couvrons ce rectangle d'une grille formée par des droites

$$x = ih, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$t = kl, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

et déterminons les valeurs approchées des solutions aux nœuds de cette grille, c'est-à-dire aux points d'intersection de ces droites. Introduisons les notations: $u(ih, kl) = u_{i,k}$. Ecrivons au lieu de l'équation (4) l'équation correspondante en différences finies pour le point (ih, kl). Conformément aux formules (3) et (2) nous obtenons:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}. \tag{8}$$

Définissons $u_{i,k+1}$:

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2}\right) u_{i,k} + a^2 \frac{l}{h^2} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}). \tag{9}$$

Il découle de la formule (9) que si l'on connaît les trois valeurs dans la k-ième série: $u_{i,k}$, $u_{i+1,k}$, $u_{i-1,k}$, on peut déterminer la valeur $u_{i,k+1}$ dans la $(k+1)$-ième série. Nous connaissons toutes les valeurs sur la droite $t = 0$ (cf. formule (5)). D'après la formule

(9) nous déterminons les valeurs sur tous les points intérieurs du segment $t = l$. Les valeurs aux extrémités de ce segment nous sont connues en vertu des formules (6) et (7). Ainsi nous déterminons rangée par rangée les valeurs de la solution recherchée pour tous les nœuds de la grille.

Il est démontré que l'on peut obtenir d'après la formule (9) une valeur approchée de la solution non pas pour une valeur arbitraire du rapport des pas h et l, mais seulement dans le cas où $l \leqslant \frac{h^2}{2a^2}$.

La formule (9) se simplifie particulièrement si le pas l suivant l'axe t est choisi de sorte que

$$1 - \frac{2a^2 l}{h^2} = 0$$

ou

$$l = \frac{h^2}{2a^2}.$$

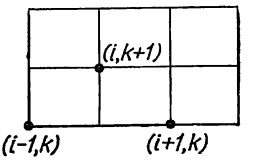


Fig. 394

Dans ce cas l'équation (9) prend la forme:

$$u_{i,\,k+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k}\right). \tag{10}$$

Cette formule est particulièrement commode pour les calculs (fig. 394). On détermine par la méthode indiquée la solution aux nœuds de la grille. La valeur de la solution entre les nœuds de la grille peut être obtenue, par exemple, par extrapolation, en menant un plan par tous les trois points de l'espace (x, t, u). Désignons par $u_h(x, t)$ la solution ainsi obtenue à l'aide de la formule (10) après extrapolation. On démontre que

$$\lim_{h \to 0} u_h(x, t) = u(x, t),$$

où $u(x, t)$ est la solution de notre problème. Il est également démontré *) que

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| < Mh^2,$$

où M est une constante indépendante de h.

§ 7. Propagation de la chaleur dans une barre infinie

Supposons que soit fixée à l'instant initial la température de diverses sections d'une barre infinie. On demande de déterminer la distribution de la température dans la barre aux instants suivants.

*) Un exposé plus détaillé de la question est donné dans l'ouvrage de L. Collatz « Numerische Behandlung von Differentialgleichungen ». Brl. Springer. 1951.

(On est conduit au problème de la propagation de la chaleur dans une barre infinie dans le cas de l'étude des problèmes physiques, la longueur de la barre étant si grande que la température de ses points intérieurs aux moments considérés ne dépend que très peu des conditions aux extrémités de la barre.)

Si la barre coïncide avec l'axe Ox, le problème mathématiquement s'énonce de la manière suivante. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

dans le domaine $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, vérifiant la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Appliquons, pour trouver la solution, la méthode de séparation des variables (cf. § 3), c'est-à-dire que nous allons rechercher une solution particulière de l'équation (1) sous forme de produit de deux fonctions :

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{3}$$

Portant dans l'équation (1) nous aurons : $X(x)\, T'(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$ ou

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Chacun de ces rapports ne peut dépendre respectivement ni de x ni de t, et c'est pourquoi nous les égalons à une constante *) $-\lambda^2$. Nous obtenons de (4) deux équations :

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{6}$$

En les résolvant nous trouvons :

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Portant dans (3), nous obtenons :

$$u_\lambda(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \tag{7}$$

(la constante C est incluse dans $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$).

Pour chaque valeur de λ nous obtenons une solution de la forme (7). Les constantes arbitraires A et B ont pour chaque valeur de λ des valeurs définies. C'est pourquoi on peut estimer que A et B sont des fonctions de λ. La somme des solutions de la forme (7) est

*) Comme, d'après le sens du problème, $T(t)$ doit être bornée quel que soit t, si $\varphi(x)$ est bornée, $\frac{T'}{T}$ doit être négatif. C'est pourquoi nous écrivons $-\lambda^2$.

aussi une solution (du fait de la linéarité de l'équation (1)) :

$$\sum_{\lambda} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x].$$

Intégrant l'expression (7) par rapport au paramètre λ entre les limites 0 et ∞ nous obtenons également une solution

$$u(x, t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{8}$$

si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont tels que cette intégrale, sa dérivée par rapport à t et sa dérivée seconde par rapport à x existent et s'obtiennent en dérivant l'intégrale par rapport à t et à x. Choisissons $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de sorte que la solution $u(x, t)$ satisfait à la condition (2). Posant dans l'égalité (8) $t = 0$, nous obtenons en vertu de la condition (2) :

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{9}$$

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ est telle qu'elle peut être représentée par une intégrale de Fourier (cf. § 13, ch. XVII) :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\,d\alpha\right) d\lambda$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$
$$\left. + \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\sin\lambda x\right] d\lambda. \tag{10}$$

Comparant les seconds membres de (9) et (10) nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Portant les valeurs trouvées de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ dans la formule (8) nous obtenons :

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda\alpha \, d\alpha \right) \cos \lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda\alpha \, d\alpha \right) \sin \lambda x \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) (\cos \lambda\alpha \cos \lambda x + \sin \lambda\alpha \sin \lambda x) \, d\alpha \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda (\alpha - x) \, d\alpha \right) d\lambda$$

et en inversant l'ordre d'intégration, nous avons en définitive :

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(\alpha) \left(\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda \right) \right] d\alpha. \tag{12}$$

C'est la solution du problème que nous avions posé.

Transformons la formule (12). Calculons l'intégrale figurant entre parenthèses :

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \beta z \, dz. \tag{13}$$

Cette transformation de l'intégrale a été effectuée à l'aide des substitutions :

$$a\lambda \sqrt{t} = z, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta. \tag{14}$$

Introduisons la notation

$$K(\beta) = \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \beta z \, dz. \tag{15}$$

Dérivant *) nous obtenons :

$$K'(\beta) = -\int_0^\infty e^{-z^2} z \sin \beta z \, dz.$$

Intégrant par parties nous trouvons :

$$K'(\beta) = \frac{1}{2} [e^{-z^2} \sin \beta z]_0^\infty - \frac{\beta}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \beta z \, dz$$

*) On démontre aisément que l'on peut dériver.

ou

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta).$$

Intégrant cette équation différentielle nous obtenons:

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{16}$$

Déterminons la constante C. Il vient de (15):

$$K(0) = \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(cf. § 5, ch. XIV). Par conséquent, dans l'égalité (16) on doit avoir

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi,

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{17}$$

Portons la valeur (17) de l'intégrale (15) dans (13):

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\alpha - x)\, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Remplaçant β par son expression (14), nous obtenons en définitive la valeur de l'intégrale (13):

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\alpha - x)\, d\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}. \tag{18}$$

Portant cette expression de l'intégrale dans la solution (12) nous aurons en définitive:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha. \tag{19}$$

Cette formule, appelée *intégrale de Poisson*, est la solution du problème posé sur la propagation de la chaleur dans une barre infinie.

R e m a r q u e. On peut démontrer que la fonction $u(x, t)$ définie par l'intégrale (19) est la solution de l'équation (1) et satisfait à la condition (2) si la fonction $\varphi(x)$ est bornée dans l'intervalle infini $(-\infty, \infty)$.

Etablissons le sens physique de la formule (19). Considérons la fonction

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}0 & \text{pour } -\infty<x<x_0,\\ \varphi(x) & \text{pour } x_0\leqslant x\leqslant x_0+\Delta x,\\ 0 & \text{pour } x_0+\Delta x<x<\infty.\end{cases} \tag{20}$$

Alors la fonction

$$u^*(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha \tag{21}$$

est la solution de l'équation (1) prenant pour $t=0$ la valeur $\varphi^*(x)$. En vertu de (20) on peut écrire :

$$u^*(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha.$$

Appliquant le théorème de la moyenne à cette dernière intégrale nous obtenons :

$$u^*(x,t)=\frac{\varphi(\xi)\,\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},\qquad x_0<\xi<x_0+\Delta x. \tag{22}$$

La formule (22) donne la valeur de la température en un point de la barre à chaque instant si pour $t=0$ la température de la barre est partout $u^*=0$, exception faite du segment $[x_0,\ x_0+\Delta x]$ où elle est égale à $\varphi(x)$. C'est précisément la somme des températures de la forme (22) qui donne la solution (19). Notons que si ρ est la densité linéaire de la barre, c la capacité calorifique de la substance, la quantité de chaleur dans l'élément $[x_0,\ x_0+\Delta x]$ pour $t=0$ sera

$$\Delta Q\approx\varphi(\xi)\,\Delta x\,\rho c. \tag{23}$$

Considérons ensuite la fonction

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}. \tag{24}$$

En la comparant au second membre de la formule (22) en tenant compte de (23) on dit qu'elle donne la température en tout point de la barre à un instant arbitraire t si pour $t=0$ dans la section ξ (cas limite lorsque $\Delta x\to 0$) se trouvait une source instantanée de chaleur d'une quantité de chaleur $Q=c\rho$.

§ 8. Problèmes conduisant à l'étude des solutions del' équation de Laplace. Enoncé des problèmes aux limites

Dans ce paragraphe nous considérerons certains problèmes conduisant à la résolution de l'*équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, le premier membre de l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\equiv\Delta u,$$

où Δ est appelé *opérateur de Laplace*. Les fonctions u vérifiant l'équation de Laplace sont appelées *fonctions harmoniques*.

I. Distribution stationnaire de la température dans un corps homogène. Soit un corps homogène Ω limité par une surface σ. Nous avons montré au § 5 que la température en divers points du corps vérifie l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Si le processus est stationnaire, autrement dit si la température ne dépend pas du temps, mais uniquement des coordonnées des points du corps, alors $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ et, par conséquent, la température vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Pour que la température du corps soit déterminée univoquement à partir de cette équation il faut connaître la température sur la surface σ. On formule donc de la manière suivante le problème aux limites pour l'équation (1).

Trouver une fonction $u(x, y, z)$ vérifiant l'équation (1) à l'intérieur du volume Ω et prenant en chaque point M de la surface σ des valeurs données:

$$u\,|_\sigma=\psi(M). \tag{2}$$

Ce problème est appelé *problème de Dirichlet* ou *premier problème aux limites* pour l'équation (1).

Si sur la surface du corps la température n'est pas connue, mais si l'on connaît le flux de chaleur en chaque point de la surface qui est proportionnel à $\frac{\partial u}{\partial n}$ (cf. § 5), on aura sur la surface σ au lieu de la condition aux limites (2) la condition

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma=\psi^*(M). \tag{3}$$

Le problème de la recherche de la solution de l'équation (1) vérifiant la condition aux limites (3) est appelé *problème de Neumann* ou *deuxième problème aux limites.*

Si l'on considère la distribution de la température sur le domaine plan D, limité par le contour C, la fonction u dépendra de deux variables x et y et vérifiera l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

que l'on appelle équation de Laplace pour le plan. Les conditions aux limites (2) ou (3) doivent être vérifiées sur le contour C.

II. Flux potentiel d'un liquide ou d'un gaz. Equation de continuité. Supposons qu'à l'intérieur du volume Ω, limité par la surface σ (en particulier, Ω peut être illimité), se produit l'écoulement d'un liquide. Soit ρ la densité du liquide. Désignons la vitesse du liquide par

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}, \tag{5}$$

où v_x, v_y, v_z sont les projections du vecteur v sur les axes de coordonnées. Isolons dans le corps Ω un petit volume ω, limité par la surface S. Par chaque élément Δs de la surface S au cours du temps Δt passe une quantité de liquide

$$\Delta Q = \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, \Delta s\, \Delta t,$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité orienté suivant la normale extérieure à la surface S. La quantité totale de liquide Q pénétrant dans le volume ω (ou s'écoulant du volume ω) s'exprime par l'intégrale

$$Q = \Delta t \iint_S \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, ds \tag{6}$$

(cf. §§ 5 et 6, ch. XV). La quantité de liquide dans le volume ω à l'instant t est

$$\iiint_\omega \rho\, d\omega.$$

Au cours du temps Δt la quantité de liquide variera, par suite de la variation de la densité, d'une quantité

$$Q = \iiint_\omega \Delta\rho\, d\omega \approx \Delta t \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega. \tag{7}$$

Supposant que le volume ω ne recèle pas de sources, nous concluons que cette variation est due à un afflux de liquide dont la quantité est déterminée par l'égalité (6). Egalant les seconds membres des

égalités (6) et (7) et simplifiant par Δt, nous obtenons:

$$\iint_S \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, ds = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega. \tag{8}$$

Transformons l'intégrale double du premier membre d'après la formule d'Ostrogradsky (§ 8, ch. XV). L'égalité (8) devient alors:

$$\iiint_\omega \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, d\omega = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega$$

ou

$$\iiint_\omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\right) d\omega = 0.$$

Le volume ω étant pris arbitrairement et la fonction sous le signe d'intégration étant continue, nous avons:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \tag{9'}$$

C'est *l'équation de continuité de l'écoulement d'un fluide compressible.*

R e m a r q u e. Dans certains problèmes, par exemple lors de l'étude de l'écoulement du pétrole ou des gaz à travers un terrain poreux vers le forage, on peut prendre

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

où p est la pression, k le coefficient de perméabilité et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

$\lambda = \text{const}$. Portant dans l'équation de continuité (9) nous aurons:

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

ou

$$-\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Si k est constant, cette équation prend la forme:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

et nous retrouvons l'équation de la chaleur.

Revenons à l'équation (9). Si le fluide est incompressible, $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et l'équation (9) s'écrit :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{12}$$

Si le mouvement est potentiel, c'est-à-dire si le vecteur $\boldsymbol{v}$ est le gradient d'une certaine fonction φ :

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

l'équation (12) prend la forme :

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

autrement dit la fonction potentielle de la vitesse φ doit vérifier l'équation de Laplace.

Dans de nombreux problèmes, comme, par exemple, dans les problèmes de filtration, on peut adopter

$$\boldsymbol{v} = -k_1 \operatorname{grad} p,$$

où p est la pression, k_1 une constante ; nous obtenons alors l'équation de Laplace pour déterminer la pression

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{13'}$$

Les conditions aux limites de l'équation (13) ou (13') sont les suivantes.

1. On donne sur la surface σ les valeurs de la fonction cherchée p qui est la pression (condition (2)). C'est le problème de Dirichlet.

2. On donne sur la surface σ les valeurs de la dérivée normale $\frac{\partial p}{\partial n}$, autrement dit le flux traversant la surface (condition (3)). C'est le problème de Neumann.

3. On donne sur une portion de la surface σ les valeurs de la fonction recherchée p (la pression) et sur une portion de la surface les valeurs de la dérivée normale $\frac{\partial p}{\partial n}$ (le flux à travers la surface). C'est le problème de Dirichlet-Neumann.

Si le mouvement parallèle est plan, c'est-à-dire si la fonction φ (ou p) ne dépend pas de z, on obtient l'équation de Laplace dans le domaine à deux dimensions D de frontière C :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Les conditions aux limites du type (2), problème de Dirichlet, ou du type (3), problème de Neumann, sont données sur le contour C.

III. Potentiel d'un courant électrique stationnaire. Supposons que dans un milieu homogène remplissant un certain volume V passe un courant électrique dont la densité en chaque point est donnée par le vecteur $\boldsymbol{J}(x, y, z) = J_x\boldsymbol{i} + J_y\boldsymbol{j} + J_z\boldsymbol{k}$. Supposons que la densité de courant ne dépend pas du temps t. Supposons encore que le volume V considéré ne contient pas de source de courant. Par conséquent, le flux du vecteur $\boldsymbol{J}$ à travers la surface fermée S située à l'intérieur du volume V est nul :

$$\iint_S \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\, ds = 0,$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité dirigé suivant la normale extérieure à la surface.

Sur la base de la formule d'Ostrogradsky nous pouvons conclure que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0. \tag{15}$$

La loi d'Ohm généralisée permet de déterminer dans le milieu conducteur considéré la force électrique $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\lambda} \tag{16}$$

ou

$$\boldsymbol{J} = \lambda\, \boldsymbol{E},$$

où λ est la conductibilité du milieu que nous estimerons constante.

Il découle des équations générales du champ électromagnétique que si le processus est stationnaire, le champ vectoriel $\boldsymbol{E}$ est irrotationnel, c'est-à-dire que rot $\boldsymbol{E} = 0$. Alors, de même que dans le cas de l'étude du champ des vitesses d'un liquide, le champ vectoriel est un champ potentiel (cf. § 9, ch. XV). Il existe une fonction φ telle que

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{17}$$

En vertu de (16) nous obtenons :

$$\boldsymbol{J} = \lambda \operatorname{grad} \varphi. \tag{18}$$

Il vient de (15) et (18) :

$$\lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Nous obtenons l'équation de Laplace.

Résolvant cette équation pour les conditions aux limites correspondantes, nous trouvons la fonction φ et d'après les formules (18) et (17) nous trouvons le courant $\boldsymbol{J}$ et la force électrique $\boldsymbol{E}$.

§ 9. Equation de Laplace en coordonnées cylindriques. Résolution du problème de Dirichlet pour un anneau avec des valeurs constantes de la fonction recherchée sur les circonférences intérieure et extérieure

Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique de trois variables. Alors par définition

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Introduisons les coordonnées cylindriques (r, φ, z):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

d'où

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad z=z. \tag{2}$$

Remplaçant les variables indépendantes x, y, z par r, φ, et z nous obtenons une fonction u^*:

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z).$$

Trouvons l'équation que doit satisfaire $u^*(r, \varphi, z)$ en tant que fonction des variables r, φ et z. Nous avons:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tag{3}$$

d'une manière analogue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \tag{4}$$

en outre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Nous trouvons les expressions pour

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

à partir des égalités (2). En faisant la somme des seconds membres des égalités (3), (4) et (5) et en égalant le résultat à zéro (car la somme des premiers membres de ces égalités est nulle en vertu de (1)),

nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}=0. \tag{6}$$

C'est l'*équation de Laplace en coordonnées cylindriques.*

Si la fonction u ne dépend pas de z et dépend de x et y, la fonction u^* qui ne dépend que de r et φ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}=0, \tag{7}$$

où r et φ sont les coordonnées polaires dans le plan.

Trouvons maintenant la solution de l'équation de Laplace dans le domaine D (anneau) limité par les circonférences $K_1 : x^2 + y^2 = R_1^2$ et $K_2 : x^2 + y^2 = R_2^2$ prenant les valeurs aux frontières suivantes :

$$u\,|_{K_1} = u_1, \tag{8}$$

$$u\,|_{K_2} = u_2, \tag{9}$$

où u_1 et u_2 sont des constantes.

Nous résoudrons le probleme en coordonnées polaires. Il est évidemment logique de rechercher une solution ne dépendant pas de φ.

L'équation (7) prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$$

Intégrant cette équation nous trouvons :

$$u = C_1 \operatorname{Log} r + C_2. \tag{10}$$

Déterminons C_1 et C_2 des conditions (8) et (9) :

$$u_1 = C_1 \operatorname{Log} R_1 + C_2,$$

$$u_2 = C_1 \operatorname{Log} R_2 + C_2.$$

Nous en tirons

$$C_1=\frac{u_2-u_1}{\operatorname{Log}\frac{R_2}{R_1}}, \quad C_2=u_1-(u_2-u_1)\frac{\operatorname{Log} R_1}{\operatorname{Log}\frac{R_2}{R_1}}=\frac{u_1 \operatorname{Log} R_2-u_2 \operatorname{Log} R_1}{\operatorname{Log}\frac{R_2}{R_1}}.$$

Portant les valeurs trouvées de C_1 et C_2 dans la formule (10) nous obtenons en définitive :

$$u=u_1+\frac{\operatorname{Log}\frac{r}{R_1}}{\operatorname{Log}\frac{R_2}{R_1}}(u_2-u_1)=\frac{u_2 \operatorname{Log}\frac{r}{R_1}+u_1 \operatorname{Log}\frac{r}{R_2}}{\operatorname{Log}\frac{R_2}{R_1}}. \tag{11}$$

R e m a r q u e. En fait nous avons résolu le problème suivant : trouver une fonction u satisfaisant à l'équation de Laplace dans le

domaine limité par les surfaces (en coordonnées cylindriques) :

$$r = R_1, \quad r = R_2, \quad z = 0, \quad z = H,$$

et vérifiant les conditions aux frontières suivantes :

$$u|_{r=R_1} = u_1, \quad u|_{r=R_2} = u_2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$$

(problème de Dirichlet-Neumann). Il est évident que la solution cherchée ne dépend ni de z ni de φ et est donnée par la formule (11).

§ 10. Résolution du problème de Dirichlet pour le cercle

Soient dans le plan Oxy un cercle de rayon R, de centre à l'origine des coordonnées et une fonction $f(\varphi)$ donnée sur sa circonférence (φ est l'angle polaire). On demande de trouver une fonction $u(r, \varphi)$ continue dans le cercle (y compris sur la frontière), vérifiant à l'intérieur du cercle l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

et prenant sur la circonférence les valeurs données

$$u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{2}$$

Nous résoudrons le problème en coordonnées polaires. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

ou

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{1'}$$

Nous chercherons la solution par la méthode de séparation des variables en posant

$$u = \Phi(\varphi) R(r). \tag{3}$$

Portant dans l'équation (1') nous obtenons :

$$r^2\Phi(\varphi) R''(r) + r\Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0$$

ou

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2. \tag{4}$$

Comme le premier membre de cette équation ne dépend pas de r, et le second membre de φ, ils sont par conséquent égaux à un nombre constant que nous désignerons par $-k^2$. Ainsi l'égalité (4) donne

deux équations :

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0, \tag{5}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0. \tag{5'}$$

La solution générale de l'équation (5) sera

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{6}$$

Nous chercherons la solution de l'équation (5′) sous la forme $R(r) = r^m$. Portant $R(r) = r^m$ dans (5′) nous obtenons :

$$r^2m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2r^m = 0$$

ou

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Nous pouvons écrire deux solutions particulières linéairement indépendantes r^k et r^{-k}. La solution générale de l'équation (5′) sera

$$R = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{7}$$

Portons les expressions (6) et (7) dans (3) :

$$u_k = (A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi)(C_kr^k + D_kr^{-k}). \tag{8}$$

La fonction (8) sera la solution de l'équation (1′) pour toute valeur de k différente de zéro. Si $k = 0$, les équations (5) et (5′) s'écrivent :

$$\Phi'' = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0,$$

et par conséquent

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0\operatorname{Log} r). \tag{8'}$$

La solution doit être une fonction périodique de φ, car pour une même valeur r correspondant à φ et $\varphi + 2\pi$ nous devons avoir la même solution ; il s'agit en effet chaque fois d'un même point du cercle. C'est pourquoi il est évident que dans la formule (8′) il faut que $B_0 = 0$. Nous cherchons la solution continue et finie dans le cercle. Par conséquent, au centre du cercle, pour $r = 0$, la solution doit être finie, et par suite il faut que dans la formule (8′) $D_0 = 0$ et dans la formule (8) $D_k = 0$.

Ainsi le second membre de (8′) se ramène au produit A_0C_0 que nous désignerons par $A_0/2$. Donc

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{8''}$$

Nous chercherons la solution de notre problème sous forme d'une somme des solutions de la forme (8), car la somme des solutions est une solution. La somme doit être une fonction périodique de φ. Il en sera ainsi si chaque terme de la somme est une fonction périodique de φ. Pour cela k doit prendre des valeurs entières. (Notons

que si nous avions égalé les membres de l'égalité (4) au nombre $+k^2$, nous n'aurions pas obtenu une solution périodique.) Nous pouvons nous borner aux valeurs positives

$$k = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

puisque, les constantes A, B, C, D étant arbitraires, les valeurs négatives de k ne donnent pas de nouvelles solutions particulières.

Ainsi

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \tag{9}$$

(la constante C_n est incluse dans A_n et B_n). Choisissons maintenant les constantes arbitraires A_n et B_n de sorte que soient vérifiées les conditions aux limites (2).

Portant dans l'égalité (9) $r = R$ nous obtenons en vertu de la condition (2) :

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n. \tag{10}$$

Pour qu'ait lieu l'égalité (10), il faut que la fonction $f(\varphi)$ admette un développement en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et que $A_n R^n$ et $B_n R^n$ soient ses coefficients de Fourier. Par conséquent, A_n et B_n sont déterminés d'après les formules :

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ainsi la série (9) avec les coefficients déterminés d'après les formules (11) sera la solution de notre problème si elle peut être deux fois dérivée terme à terme par rapport à r et à φ (mais cela n'a pas été démontré). Transformons la formule (9). Remplaçant A_n et B_n par leurs expressions (11) et effectuant certaines transformations trigonométriques nous obtenons :

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\varphi)\, dt \left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] dt. \tag{12}$$

Transformons l'expression figurant entre crochets *) :

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}]=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n+\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right]=$$

$$=1+\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \qquad (13)$$

Remplaçant l'expression figurant entre crochets dans la formule (12) par l'expression (13) nous obtenons :

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \qquad (14)$$

La formule (14) est appelée *intégrale de Poisson*. On démontre en analysant cette formule que si la fonction $f(\varphi)$ est continue, la fonction $u(r,\ \varphi)$ définie par l'intégrale (14) vérifie l'équation (1'), et lorsque $r\to R$, nous aurons $u(r,\ \varphi)\to f(\varphi)$, autrement dit $u(r, \varphi)$ est la solution du problème de Dirichlet que nous avons posé pour le cercle.

§ 11. Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies

Soit dans le plan Oxy un domaine limité par le contour C. Soit donnée sur le contour C une fonction continue f. On demande de trouver la solution approchée de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

*) Durant la démonstration nous déterminons la somme d'une progression géométrique infinie, dont la raison est un nombre complexe de module inférieur à l'unité. Cette formule de la somme d'une progression géométrique peut être établie de la même façon que pour les nombres réels. Il faut toutefois tenir compte de la définition de la limite d'une fonction complexe de la variable réelle. La variable indépendante est ici n (cf. § 4, ch. VII, t. I).

vérifiant la condition aux limites

$$u\,|_C = f. \tag{2}$$

Traçons deux familles de droites :

$$x = ih \quad \text{et} \quad y = kh, \tag{3}$$

où h est un nombre donné, i et k prenant successivement les valeurs entières. Nous dirons que le domaine D est recouvert par *une grille* (quadrillage). Les points d'intersection des différentes droites seront dits *nœuds de la grille*.

Nous désignerons la valeur approchée de la fonction cherchée au point $x = ih$, $y = kh$ par $u_{i,\,k}$, c'est-à-dire $u\,(ih,\ kh) = u_{i,\,k}$.

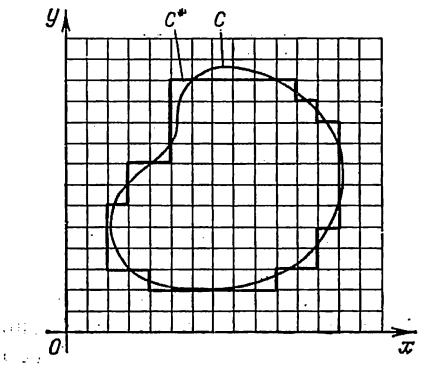


Fig. 395

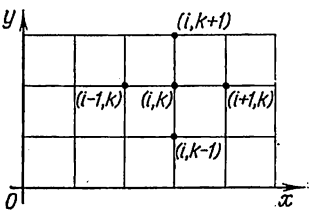


Fig. 396

Nous assimilons le domaine D au domaine de la grille D^* constitué de l'ensemble des carrés contenus entièrement dans le domaine D, ainsi que de quelques carrés coupant la frontière C (on peut ne pas en tenir compte). On assimile le contour C au contour C^* constitué de segments de droite du type (3). En chaque nœud situé sur le contour C^* donnons la valeur f^* égale à la valeur de la fonction f correspondant au point le plus proche du contour C (fig. 395).

Nous ne considérons les valeurs de la fonction cherchée que pour les nœuds de la grille. Comme nous l'avons déjà indiqué au § 6, lors de la résolution par la méthode approchée les dérivées sont remplacées par les différences finies :

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i-1,\,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i,\,k+1} - 2u_{i,\,k} + u_{i,\,k-1}}{h^2}$$

L'équation différentielle (1) est remplacée par l'*équation aux différences finies* (après simplification par h^2) :

$$u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1} = 0$$

ou (fig. 396)

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \tag{4}$$

Pour chaque nœud de la grille situé à l'intérieur du domaine D^* (et non situé sur la frontière de C^*) composons l'équation (4). Si le point ($x = ih$, $y = kh$) est voisin du point du contour C^*, dans le second membre de l'égalité (4) nous aurons les valeurs de f^*. Nous obtenons ainsi un système non homogène de N équations à N inconnues (N est le nombre de nœuds de la grille, situés à l'intérieur du domaine D^*).

Démontrons que le système (4) possède une solution qui est unique. C'est un système de N équations linéaires à N inconnues. Il possède une solution unique dans le cas où le déterminant du système est différent de zéro. Le déterminant du système est différent de zéro si le système homogène n'a qu'une solution triviale (nulle). Le système sera homogène si $f^* = 0$ pour les nœuds de la grille situés sur le contour C^*. Nous démontrerons que dans ce cas toutes les valeurs $u_{i,k}$ pour tous les nœuds intérieurs de la grille sont nulles. Supposons qu'à l'intérieur du domaine il existe des $u_{i,k}$ différents de zéro. Pour fixer les idées supposons que la plus grande de ces valeurs est positive. Désignons-la par $\overline{u}_{i,k} > 0$.

En vertu de la formule (4) nous écrirons :

$$\overline{u}_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \tag{4'}$$

Cette égalité n'est vérifiée que dans le cas où toutes les valeurs u du second membre sont égales à la plus grande valeur $\overline{u}_{i,k}$. Nous avons ainsi cinq points pour lesquels la valeur de la fonction cherchée est $\overline{u}_{i,k}$. Si aucun de ces points n'est sur la frontière, nous démontrerons en prenant l'un d'entre eux et en écrivant pour lui l'égalité (4) qu'en d'autres points la valeur de la fonction inconnue sera aussi égale à $\overline{u}_{i,k}$. Poursuivant ainsi nous parviendrons à la frontière et démontrerons que pour un point de la frontière la valeur de la fonction est égale à $\overline{u}_{i,k}$. Mais cela contredit le fait qu'aux points de la frontière $f^* = 0$.

Supposant maintenant qu'à l'intérieur du domaine nous avons une valeur négative minimale nous démontrerons de la même façon que sur la frontière la valeur de la fonction est négative, ce qui contredit aussi la condition posée.

Ainsi le système (4) possède une solution qui est unique.

Les valeurs de $u_{i,k}$ déterminées à partir du système (4) constituent les valeurs approchées de la solution du problème de Dirichlet formulé plus haut. Il est établi que si la solution du problème de Dirichlet, pour un domaine donné D et une fonction donnée f, existe (désignons-la par $u(x, y)$) et si $u_{i,k}$ est la solution du système (4), nous aurons alors la relation

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2, \tag{5}$$

où A est une constante indépendante de h.

Remarque. Il est parfois possible, bien que cela ne soit pas démontré rigoureusement, d'utiliser le procédé suivant pour évaluer l'erreur commise par la solution approchée. Soit $u_{i,k}^{(2h)}$ la solution approchée pour un pas égal à $2h$, $u_{i,k}^{(h)}$ la solution approchée pour un pas égal à h, $E_h(x, y)$ l'erreur de la solution $u_{i,k}^{(h)}$. Alors nous avons l'égalité approchée

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3}(u_{i,k}^{(2h)} - u_{i,k}^{(h)})$$

aux nœuds communs des grilles. Ainsi pour déterminer l'erreur de la solution approchée pour un pas h, il faut trouver la solution pour un pas $2h$. Le tiers de la différence de ces solutions approchées est précisément l'estimation de l'erreur de la solution pour le pas h. Cette remarque peut concerner également la résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies.

Exercices

1. Etablir l'équation des vibrations de torsion d'une barre homogène cylindrique.

   Indication. Le moment de torsion dans la section de la barre d'abscisse x est donné par la formule $M = GI\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, où $\theta(x, t)$ est l'angle de torsion de la section d'abscisse x à l'instant t, G le module de glissement, I le moment d'inertie polaire de la section transversale de la barre.

   Rép. $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, où $a^2 = \dfrac{GI}{k}$, k est le moment d'inertie de l'unité de longueur de la barre.

2. Trouver la solution de l'équation $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, vérifiant les conditions

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(l, t) = 0, \ \theta(x, 0) = \varphi(x), \ \frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t} = 0, \text{ où}$$

$$\varphi(x) = \frac{2\theta_0 x}{l} \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2},$$

$$\varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0 \quad \text{pour } \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l.$$

Donner une interprétation mécanique du problème. Rép. $\theta(x, t) = \frac{8\theta_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{l}$.

3. Etablir l'équation des vibrations longitudinales d'une barre cylindrique homogène.

Indication. Si $u(x, t)$ désigne le déplacement de la section du cylindre d'abscisse x à l'instant t, la contrainte de traction T de la section x est donnée par la formule $T = ES \frac{\partial u}{\partial x}$, où E est le module d'élasticité du matériau, S l'aire de la section transversale de la barre.

Rép. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, où $a^2 = \frac{E}{\rho}$, ρ la densité du matériau de la barre.

4. Une barre homogène de longueur $2l$ sous l'action des forces appliquées à ses extrémités s'est raccourcie de 2λ. A l'instant $t = 0$ on la libère de l'action des forces extérieures qui lui étaient appliquées. Déterminer le déplacement $u(x, t)$ de la section de la barre d'abscisse x à l'instant t (le milieu de l'axe de la barre est situé au point d'abscisse $x = 0$).

Rép. $u(x, t) = \frac{8\lambda}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l}$.

5. Une barre de longueur l est fixée par l'une de ses extrémités et sur l'autre agit une force d'extension P. Trouver les vibrations longitudinales de la barre si pour $t = 0$ la force P n'agit pas.

Rép. $\frac{8Pl}{ES\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}$ (voir le problème 3 pour le sens de E et S).

6. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ satisfaisant aux conditions

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Donner une interprétation mécanique du problème.

Rép. $$u(x, t) = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Indication. Chercher la solution sous forme de somme de deux solutions :

$$u = v + w, \quad \text{où } w = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l}$$

est la solution vérifiant les conditions :

$$v(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)=0,\quad v(x,\ 0)=-w(x,\ 0),\ \frac{\partial v(x,\ 0)}{\partial t}=-\frac{\partial w(x,\ 0)}{\partial t}.$$

$\left(\text{On suppose que } \sin\frac{\omega}{a}\,l\neq 0.\right)$

7. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant les conditions :

$$u(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=0,\ t>0,\quad u(x,\ 0)=\begin{cases} x \text{ pour } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}, \\ l-x \text{ pour } \frac{l}{2}<x<l. \end{cases}$$

Rép. $u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

Indication. Résoudre le problème par la méthode de séparation des variables.

8. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant les conditions :

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ u(x,\ 0)=\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

Rép. $u(x,\ t)=\frac{8}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

9. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant les conditions :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad u(l,\ t)=u_0,\ u(x,\ 0)=\varphi(x).$$

Donner le sens physique du problème.

Rép. $u(x,\ t)=u_0+\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$

où $A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx-\frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}$.

Indication. Rechercher la solution sous la forme $u=u_0+v(x,\ t)$.

10. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant les conditions :

$$u(0,\ t)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-\left.Hu\right|_{x=l},\ u(x,\ 0)=\varphi(x).$$

Donner le sens physique du problème.

Rép. $u(x,\ t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}\,e^{-\frac{\mu_n^2a^2t^2}{l^2}}\sin\frac{\mu_n x}{l},$

où $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\mu_n x}{l}\,dx$, $p = Hl$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont les racines positives de l'équation $\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{p}$.

Indication. A l'extrémité $x = l$ de la barre se produit un échange de chaleur avec le milieu ambiant, dont la température est nulle.

11. Trouver (d'après la formule (10) du § 6 en posant $h = 0{,}2$) la solution approchée de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant les conditions:

$$u(x, 0) = x\left(\frac{3}{2} - x\right), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4l.$$

12. Trouver la solution de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans la bande $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y < \infty$, vérifiant les conditions:

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad u(x, \infty) = 0.$$

Rép. $u(x, t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi x}{a}$.

Indication. Chercher la solution par la méthode de séparation des variables.

13. Trouver la solution de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, vérifiant les conditions: $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$, $u(0, y) = Ay(b - y)$, $u(a, y) = 0$.

Rép. $u(x, t) = \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\,\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}$.

14. Trouver la solution de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ à l'intérieur de l'anneau limité par les circonférences $x^2 + y^2 = R_1^2$, $x^2 + y^2 = R_2^2$, vérifiant les conditions:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1} = +\frac{Q}{\lambda\, 2\pi R_1}, \quad \left.u\right|_{r=R_2} = u_2.$$

Donner une interprétation hydrodynamique du problème.

Indication. Résoudre le problème en coordonnées polaires.

Rép. $u = u_2 - \frac{Q}{2\lambda\pi}\operatorname{Log}\frac{R_2}{r}$.

15. Démontrer que la fonction $u(x, y) = e^{-y}\sin x$ est la solution de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, vérifiant les conditions: $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = e^{-y}\sin 1$, $u(x, 0) = \sin x$, $u(x, 1) = e^{-1}\sin x$.

16. Dans les problèmes 12-15, pour des conditions aux limites données, résoudre l'équation de Laplace par la méthode des différences finies dans le cas de $h = 0{,}25$. Comparer la solution approchée avec la solution exacte.

Chapitre XIX

CALCUL OPÉRATIONNEL ET APPLICATIONS

A l'heure actuelle le calcul opérationnel (ou symbolique) est l'un des domaines importants de l'analyse mathématique. En physique, en mécanique, en électrotechnique et dans d'autres branches de la science on utilise les méthodes du calcul opérationnel pour la résolution de différents problèmes. Le calcul opérationnel a trouvé une application particulièrement large dans la technologie moderne de l'automation et des télécommunications. Dans ce chapitre (sur la base du matériel des chapitres précédents) seront précisément exposées les notions fondamentales du calcul opérationnel ainsi que les méthodes de son application à la résolution des équations différentielles ordinaires.

§ 1. Original et image

Soit donnée une fonction de la variable réelle t définie pour $t \geqslant 0$ (parfois nous estimerons que la fonction $f(t)$ est définie dans un intervalle infini $-\infty < t < \infty$, mais $f(t) = 0$ quand $t < 0$). Nous supposerons que la fonction $f(t)$ est continue par tranches, c'est-à-dire telle que, dans chaque intervalle fini, elle possède un nombre fini de discontinuités de 1ère espèce (cf. § 9, ch. II, t. I). Pour assurer l'existence de certaines intégrales dans l'intervalle infini $0 \leqslant t < \infty$ nous imposerons à la fonction $f(t)$ des restrictions complémentaires. Nous supposerons précisément qu'il existe des nombres positifs constants M et s_0 tels que

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

pour toute valeur de t prise dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$.

Considérons le produit de la fonction $f(t)$ par la fonction complexe e^{-pt} de la variable réelle *) t, où $p = a + ib$ $(a > 0)$ est un nombre complexe :

$$e^{-pt} f(t). \tag{2}$$

*) Au sujet des fonctions complexes de la variable réelle cf. § 4, ch. VII t. I.

La fonction (2) est aussi une fonction complexe de la variable réelle t:

$$e^{-pt}f(t) = e^{-(a+ib)t}f(t) = e^{-at}f(t)\,e^{-ibt} =$$
$$= e^{-at}f(t)\cos bt - ie^{-at}f(t)\sin bt.$$

Considérons ensuite l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt\,dt - i\int_0^\infty e^{-at}f(t)\sin bt\,dt. \tag{3}$$

Montrons que si la fonction $f(t)$ vérifie la condition (1) et $a > s_0$, alors les intégrales du second membre de l'égalité (3) existent et la convergence des ces intégrales est absolue. Estimons d'abord la première de ces intégrales:

$$\left|\int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-at}f(t)\cos bt|\,dt <$$
$$< M\int_0^\infty e^{-at}e^{s_0t}\,dt = M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}\,dt = \frac{M}{a-s_0}.$$

On estime de même la seconde intégrale. Ainsi, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ existe. Elle définit une certaine fonction de p, que nous désignerons *) par $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{4}$$

La fonction $F(p)$ est appelée *transformée de Laplace* ou *image L* ou simplement *image* de $f(t)$. La fonction $f(t)$ est appelée *original* ou *fonction objet*. Le fait que $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$ est noté de manière suivante:

$$F(p) \div f(t), \tag{5}$$

ou

$$f(t) \div F(p), \tag{6}$$

soit encore

$$L\{f(t)\} = F(p). \tag{7}$$ **)

*) La fonction $F(p)$ pour $p \neq 0$ est une fonction de la variable complexe (cf., par exemple, l'ouvrage de V. Smirnov « Cours de mathématiques supérieures », t. III, partie 2. Editions de Moscou, 1972). La transformation est analogue à celle de Fourier examinée au § 14, ch. XVII.

**) On utilise aussi d'autres symboles de correspondances. C'est ainsi qu'au lieu de la notation $\div$ on emploie aussi le symbole] et on écrit dans le cas de la formule (6) $f(t)\ ]\ F(p)$ (*N.d.T.*).

Comme nous le verrons par la suite, le sens de l'introduction des images réside dans le fait qu'elles permettent de simplifier la résolution de nombreux problèmes, en particulier, de ramener la résolution des équations différentielles ordinaires à certaines opérations algébriques simples permettant de trouver la fonction image. Connaissant l'image on peut trouver l'original soit au moyen des tables préalablement composées « original-image » (dictionnaire d'images), soit par les méthodes que nous exposerons plus bas. Des questions se posent alors naturellement.

Soit donnée une certaine fonction $F(p)$. Existe-t-il une fonction $f(t)$ dont $F(p)$ est l'image? Si elle existe, est-elle unique? Les deux questions reçoivent une réponse positive si $F(p)$ et $f(t)$ satisfont à certaines conditions. En particulier l'unicité de l'image est établie par le théorème suivant que nous énoncerons sans démonstration :

Théorème d'unicité. *Si deux fonctions continues* $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *possèdent une même image* $L\,F(p)$, *ces fonctions sont identiquement égales.*

Ce théorème sera d'une grande utilité pour tout ce qui suivra. En effet, si lors de la résolution d'un problème pratique nous avons pu déterminer l'image de la fonction cherchée, et si ensuite nous avons trouvé l'original d'après son image, nous pouvons conclure en vertu du théorème formulé que la fonction trouvée est la solution du problème posé et qu'il n'existe pas d'autres solutions.

§ 2. Image des fonctions $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$

I. La fonction $f(t)$ ainsi définie

$$f(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$
$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0$$

est appelée *fonction unité de Heaviside* et notée $\sigma_0(t)$. Le graphique

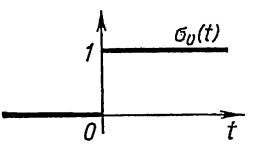


Fig. 397

de cette fonction est représenté sur la fig. 397. Trouvons l'image L de la fonction de Heaviside :

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Ainsi, *)

$$1 \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p} \tag{8}$$

ou, plus exactement,

$$\sigma_0(t) \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p}.$$

Dans certains traités de calcul opérationnel on appelle image de la fonction $f(t)$ l'expression

$$F^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Dans ce cas on a: $\sigma_0(t) \leftarrow\!\!\div 1$ et, par conséquent, $C \leftarrow\!\!\div C$, plus exactement $C\sigma_0(t) \leftarrow\!\!\div C$.

II. Soit $f(t) = \sin t$; alors

$$L\{\sin t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin t\, dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin t - \cos t)}{p^2+1}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

Ainsi,

$$\sin t \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p^2+1}. \tag{9}$$

III. Soit $f(t) = \cos t$; alors

$$L\{\cos t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t\, dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p \cos t)}{p^2+1}\Big|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

Ainsi,

$$\cos t \leftarrow\!\!\div \frac{p}{p^2+1}. \tag{10}$$

§ 3. Image des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante. Image des fonctions sin at, cos at

Considérons l'image de la fonction $f(at)$, où $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)\, dt.$$

---

*) Pour calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt} dt$ on aurait pu la représenter comme la somme des intégrales de fonctions réelles; nous aurions obtenu le même résultat. Cette remarque se rapporte également aux intégrales suivantes.

Effectuons un changement de variable dans la seconde intégrale, posant $z = at$; par conséquent, $dz = a\,dt$; nous obtenons alors :

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\,dz$$

ou

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Ainsi, *si*

$$F(p) \div f(t),$$

alors

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \div f(at). \tag{11}$$

Exemple 1. Nous obtenons immédiatement de la formule (9) en vertu de (11) :

$$\sin at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$$

ou

$$\sin at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{a}{p^2+a^2}. \tag{12}$$

Exemple 2. Nous obtenons de la formule (10) en vertu de (11) :

$$\cos at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{a}\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$$

ou

$$\cos at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2+a^2}. \tag{13}$$

§ 4. Propriété de linéarité de l'image

Théorème. *L'image de la somme de plusieurs fonctions, multipliées par des constantes, est égale à la somme des images de ces fonctions multipliées par les constantes correspondantes, autrement dit si*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \tag{14}$$

(C_i *sont des constantes*) *et*

$$F(p) \div f(t), \quad F_i(p) \div f_i(t),$$

alors

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p). \tag{14'}$$

Démonstration. Multiplions tous les termes de l'égalité (14) par e^{-pt} et intégrons en t entre les limites 0 et ∞ (sortant les facteurs C_i de sous le signe d'intégration), nous obtenons l'égalité (14').

Exemple 1. Trouver l'image de la fonction

$$f(t) = 3 \sin 4t - 2 \cos 5t.$$

Solution. En vertu des formules (12), (13) et (14') nous obtenons:

$$L\{f(t)\} = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

Exemple 2. Trouver l'original dont l'image est donnée par l'expression

$$F(p) = \frac{5}{p^2+4} + \frac{20p}{p^2+9}.$$

Solution. Représentons $F(p)$ de la manière suivante:

$$F(p) = \frac{5}{2}\frac{2}{p^2+(2)^2} + 20\frac{p}{p^2+(3)^2}.$$

Par conséquent, en vertu des formules (12), (13) et (14') nous obtenons:

$$f(t) = \frac{5}{2}\sin 2t + 20 \cos 3t.$$

Il découle du théorème d'unicité du § 1 que c'est l'unique original qui correspond à la fonction donnée $F(p)$.

§ 5. Théorème du déplacement

Théorème. *Si* $F(p)$ *est l'image de la fonction* $f(t)$, *alors* $F(p+\alpha)$ *est l'image de la fonction* $e^{-\alpha t} f(t)$, autrement dit

$$\left.\begin{array}{l} \textit{si} \quad F(p) \div f(t), \\ \textit{alors} \quad F(p+\alpha) \div e^{-\alpha t} f(t). \end{array}\right\} \tag{15}$$

(Nous supposons ici que $\operatorname{Re}(p+\alpha) > s_0$.)

Démonstration. Trouvons l'image de la fonction $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt-\alpha t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} f(t)\, dt.$$

Ainsi,

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p+\alpha).$$

Le théorème démontré élargit notablement la classe des images pour lesquelles l'original peut aisément être retrouvé.

§ 6. Image des fonctions $e^{-\alpha t}$, sh αt, ch αt, $e^{-\alpha t}\sin at$, $e^{-\alpha t}\cos at$

Il découle immédiatement de la formule (8), en vertu de la formule (15), que

$$\frac{1}{p+\alpha} \risingdotseq e^{-\alpha t}. \tag{16}$$

D'une manière analogue

$$\frac{1}{p-\alpha} \risingdotseq e^{\alpha t}. \tag{16'}$$

Retranchant des termes de la relation (16′) les termes correspondants de la relation (16) et divisant les différences obtenues par 2, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)$$

ou

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \risingdotseq \operatorname{sh} \alpha t. \tag{17}$$

De même, en faisant la somme de (16) et de (16′), on a :

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2} \risingdotseq \operatorname{ch} \alpha t. \tag{18}$$

Il découle de la formule (12) en vertu des formules (15) :

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \risingdotseq e^{-\alpha t}\sin at. \tag{19}$$

De la formule (13) en vertu des formules (15) il découle :

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \risingdotseq e^{-\alpha t}\cos at. \tag{20}$$

Exemple 1. Trouver l'original si l'image est donnée par la formule

$$F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}.$$

Solution. Transformons $F(p)$ de façon à lui donner la forme de l'expression du premier membre de la relation (19) :

$$\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\,\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Ainsi,

$$F(p)=\frac{7}{4}\,\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Par conséquent, en vertu de la formule (19), nous aurons :

$$F(p) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\rightarrow}} \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t.$$

Exemple 2. Trouver l'original si l'image est donnée par la formule

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Solution. Transformons la fonction $F(p)$:

$$\frac{p+3}{p^2+2p+10} = \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{(p+1)^2+3^2} =$$
$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{(p+1)^2+3^2},$$

en vertu des formules (19) et (20) nous trouvons l'original

$$F(p) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\rightarrow}} e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t.$$

§ 7. Dérivation de l'image

Théorème. *Si* $F(p) \div f(t)$, *alors*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \div t^n f(t). \tag{21}$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord que si $f(t)$ vérifie la condition (1), alors l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t)\, dt \tag{22}$$

existe.

Par hypothèse $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $p = a + ib$, $a > s_0$; en outre nous avons $a > 0$ et $s_0 > 0$. Il est évident qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité $a > s_0 + \varepsilon$. De même qu'au § 1 on démontre l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|\, dt.$$

Estimons ensuite l'intégrale (22) :

$$\int_0^\infty |e^{-pt} t^n f(t)|\, dt = \int_0^\infty |e^{-(a-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)|\, dt.$$

La fonction $e^{-\varepsilon t}t^n$ étant bornée et plus petite en valeur absolue qu'un certain nombre N pour tout $t > 0$, on peut écrire:

$$\int_0^\infty |e^{-pt}t^n f(t)|\,dt < N\int_0^\infty |e^{-(p-\varepsilon)t}f(t)|\,dt = N\int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t}|f(t)|\,dt < \infty.$$

Nous avons ainsi démontré l'existence de l'intégrale (22). Or, cette intégrale peut être considérée comme la dérivée du n-ième ordre par rapport au paramètre *) p de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Ainsi de la formule

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$$

nous tirons la formule

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t)\,dt = \frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Ces deux égalités nous donnent

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}t^n f(t),$$

c'est-à-dire la formule (21).

Utilisons la formule (22) pour trouver l'image de la fonction puissance. Ecrivons la formule (8):

$$\frac{1}{p} \div\!\!\!\rightarrow 1.$$

Nous obtenons de cette formule en vertu de la formule (21):

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \div\!\!\!\rightarrow t$$

ou

$$\frac{1}{p^2} \div\!\!\!\rightarrow 1.$$

D'une manière analogue

$$\frac{2}{p^3} \div\!\!\!\rightarrow t^2.$$

*) Nous avons établi au préabable la formule de dérivation de l'intégrale définie par rapport à un paramètre réel (cf. § 10, ch. XI, t. I). Ici le paramètre p est un nombre complexe, mais la formule de dérivation reste valable.

Pour un n quelconque nous obtenons:

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \div t^n. \tag{23}$$

Exemple 1. Nous tirons de la formule (cf. (12))

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin at\, dt,$$

en dérivant les premier et second membres par rapport au paramètre p:

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t \sin at. \tag{24}$$

Exemple 2. Nous obtenons de la formule (13) en vertu de la formule (21):

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t \cos at. \tag{25}$$

Exemple 3. Nous obtenons de la formule (16) on vertu de la formule (21):

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} te^{-\alpha t}. \tag{26}$$

§ 8. Image des dérivées

Théorème. *Si* $F(p) \div f(t)$, *alors*

$$pF(p) - f(0) \div f'(t). \tag{27}$$

Démonstration. En vertu de la définition de l'image d'une fonction nous pouvons écrire:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt. \tag{28}$$

Nous supposerons que toutes les dérivées $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$, que nous rencontrerons, satisfont à la condition (1) et, par conséquent, que l'intégrale (28) et les intégrales analogues pour les dérivées successives existent. Effectuant l'intégration par parties de l'intégrale du second membre de l'égalité (28) nous trouvons:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Or d'après la condition (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = F(p).$$

C'est pourquoi

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

Le théorème est démontré.

Considérons ensuite l'image des dérivées d'ordre quelconque. Portant dans la formule (27) l'expression $pF(p) - f(0)$ au lieu de $F(p)$ et remplaçant $f(t)$ par $f'(t)$ nous obtenons:

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \doteqdot f''(t)$$

ou, en ouvrant les parenthèses,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \doteqdot f''(t). \tag{29}$$

L'image de la dérivée d'ordre n sera

$$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots$$
$$\ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \doteqdot f^{(n)}(t). \tag{30}$$

R e m a r q u e. Les formules (27), (29) et (30) se simplifient, si $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Dans ce cas nous obtenons:

$$F(p) \doteqdot f(t),$$
$$pF(p) \doteqdot f'(t),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$p^nF(p) \doteqdot f^{(n)}(t)$$

§ 9. Dictionnaire d'images

Pour faciliter l'utilisation des images obtenues nous les groupons dans un tableau ci-contre.

R e m a r q u e. Si nous prenons pour image de la fonction $f(t)$

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt,$$

il convient dans les formules 1 à 13 du tableau de multiplier les expressions de la première colonne par p. Quant aux formules 14 et 15 elles seront de la forme: comme $F^*(p) = pF(p)$, en remplaçant dans le premier membre de la formule 14 $F(p)$ par l'expression $\frac{F^*(p)}{p}$ et en multipliant par p nous obtenons:

14'. $$(-1)^n p\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right) \doteqdot t^nf(t).$$

Portant dans le premier membre de la formule 15

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \quad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

Tableau 1

n^{os}	$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
11	$\frac{p^2+a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)\,F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$

Remarque. Les formules 13 et 15 du tableau seront établies par la suite.

et multipliant par p, nous obtenons :

$$15'. \qquad \frac{1}{p} F_1^*(p) F_2^*(p) \doteqdot \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

§ 10. Equation auxiliaire d'une équation différentielle donnée

Soit donnée une équation différentielle linéaire du n-ième ordre à coefficients constants $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \qquad (31)$$

On demande de trouver la solution de cette équation $x = x(t)$ pour $t \geqslant 0$, vérifiant les conditions initiales :

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \qquad (32)$$

Le problème avait déjà été résolu de la manière suivante : nous cherchons d'abord la solution générale de l'équation (31) contenant n constantes arbitraires ; ensuite nous déterminons les constantes de manière que les conditions initiales (32) soient vérifiées.

Nous exposerons maintenant une méthode plus simple de résolution de ce problème, la méthode du calcul opérationnel. Nous chercherons l'image L de la solution $x(t)$ de l'équation (31) vérifiant les conditions (32). Désignons cette image L par $\bar{x}(p)$; ainsi, $\bar{x}(p) \doteqdot x(t)$.

Supposons que l'image de la solution de l'équation (31), ainsi que de ses dérivées jusqu'à l'ordre n inclus existe (une fois la solution trouvée, nous pouvons vérifier la validité de cette supposition). Multiplions les deux membres de l'égalité (31) par e^{-pt}, où $p = a + ib$ et intégrons en t entre les limites 0 et ∞ :

$$a_0 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n}\, dt + a_1 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\, dt + \ldots$$

$$\ldots + a_n \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (33)$$

Dans le premier membre de l'égalité nous avons l'image L de la fonction $x(t)$ et de ses dérivées, dans le second membre l'image L de la fonction $f(t)$ que nous désignerons par $F(p)$. Par conséquent, l'égalité (33) peut être mise sous la forme :

$$a_0 L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Remplaçant dans cette égalité les images de la fonction et de ses dérivées par les expressions (27), (29), (30) nous obtenons:

$$\begin{aligned}
&a_0\{p^n\bar{x}(p)-[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+p^{n-3}x_0''+\ldots+x_0^{(n-1)}]\}+\\
&+a_1\{p^{n-1}\bar{x}(p)-[p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)}]\}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+a_{n-1}\{p\bar{x}(p)-x_0\}+a_n\bar{x}(p)=F(p).
\end{aligned}\tag{34}$$

L'équation (34) est appelée *équation auxiliaire* ou *équation image*. Dans cette équation l'inconnue est l'image $\bar{x}(p)$, que nous déterminons à partir de cette équation. Transformons cette équation en laissant dans le premier membre les termes contenant $\bar{x}(p)$:

$$\begin{aligned}
&\bar{x}(p)[a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n]=\\
&=a_0[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+x_0^{(n-1)}]+\\
&+a_1[p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)}]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+a_{n-2}[px_0+x_0']+a_{n-1}x_0+F(p).
\end{aligned}\tag{34'}$$

Le coefficient de $\bar{x}(p)$ dans le premier membre de l'égalité (34') est un polynôme en p d'ordre n que l'on peut obtenir si dans le premier membre de l'équation (31) on remplace les dérivées par les puissances correspondantes de p. Désignons-le par $\varphi_n(p)$:

$$\varphi_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n.\tag{35}$$

Le second membre de l'équation (34') est ainsi composé:

le coefficient a_{n-1} est multiplié par x_0,
le coefficient a_{n-2} est multiplié par px_0+x_0',
. . . . . .
le coefficient a_1 est multiplié par $p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)}$,
le coefficient a_0 est multiplié par $p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+x_0^{(n-1)}$.

On fait la somme de tous ces produits. Ajoutons encore l'image du second membre de l'équation différentielle $F(p)$. Tous les termes du second membre de l'égalité (34'), $F(p)$ excepté, constituent, après groupement des termes semblables, un polynôme en p de degré $n-1$ dont les coefficients sont connus. Désignons-le par $\psi_{n-1}(p)$. L'équation (34') peut être écrite ainsi:

$$\bar{x}(p)\,\varphi_n(p)=\psi_{n-1}(p)+F(p).$$

Nous déterminons $\bar{x}(p)$ à partir de cette équation:

$$\bar{x}(p)=\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}+\frac{F(p)}{\varphi_n(p)}.\tag{36}$$

Il s'ensuit que $\bar{x}(p)$ ainsi déterminé est l'image de la solution $x(t)$ de l'équation (31), vérifiant les conditions initiales (32). Si maintenant nous trouvons la fonction $x^*(t)$ dont l'image est la fonction $\bar{x}(p)$, définie par l'égalité (36), il découlera alors du théorème d'unicité formulé au § 1 que $x^*(t)$ est la solution de l'équation (31) vérifiant les conditions (32), autrement dit

$$x^*(t) = x(t).$$

Si nous voulons trouver la solution de l'équation (31) pour les conditions initiales nulles : $x_0 = x_0' = x_0'' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$, alors dans l'égalité (36) nous aurons $\psi_{n-1}(p) = 0$ et elle sera de la forme

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$

ou

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{36'}$$

Exemple 1. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} + x = 1,$$

vérifiant les conditions initiales : $x = 0$ pour $t = 0$.

Solution. Formons l'équation auxiliaire

$$\bar{x}(p)(p+1) = 0 + \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{(p+1)p}.$$

Décomposons la fraction du second membre en éléments simples, nous obtenons :

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Utilisant les formules 1 et 4 du tableau 1 nous trouvons la solution :

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

Exemple 2. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 1,$$

vérifiant les conditions initiales : $x_0 = x_0' = 0$ pour $t = 0$.

Solution. Ecrivons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+9) = \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{p(p^2+9)}.$$

Décomposant cette fraction en éléments simples, nous obtenons :

$$\bar{x}(p) = \frac{-\frac{1}{9}p}{p^2+9} + \frac{\frac{1}{9}}{p}.$$

En vertu des formules 1 et 3 du tableau 1 nous trouvons la solution :

$$x(t) = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9}.$$

Exemple 3. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t,$$

vérifiant les conditions initiales : $x_0 = x_0' = 0$ pour $t = 0$.

Solution. Ecrivons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2}$$

ou

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2}\frac{1}{(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Décomposant cette fraction en éléments simples par la méthode des coefficients indéterminés, nous obtenons :

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}.$$

D'après les formules 9, 1 et 4 du tableau 1 nous trouvons la solution :

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Exemple 4. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t,$$

vérifiant les conditions initiales : $x_0 = 1$, $x_0' = 2$ pour $t = 0$.

Solution. Ecrivons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 1 + L\{\sin t\}$$

ou

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5) = p + 4 + \frac{1}{p^2+1},$$

d'où nous trouvons $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Décomposant la dernière fraction du second membre en éléments simples nous pouvons écrire :

$$\bar{x}(p) = \frac{\frac{11}{10}p + 4}{p^2+2p+5} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{1}{5}}{p^2+1}$$

ou

$$\bar{x}(p) = \frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2} -$$
$$-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

En vertu des formules 8, 7, 3 et 2 du tableau 1 nous trouvons la solution :

$$x(t)=\frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$$

ou en définitive :

$$x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\sin 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t.$$

§ 11. Théorème de décomposition

Il découle de la formule (36) du précédent paragraphe que l'image de la solution d'une équation différentielle linéaire se compose de deux termes : le premier est une fraction rationnelle régulière de p, le second une fraction dont le numérateur est l'image du second membre $F(p)$ de l'équation et le dénominateur le polynôme $\varphi_n(p)$. Si $F(p)$ est une fraction rationnelle, le second terme sera aussi une fraction rationnelle. Il faut ainsi savoir trouver l'original dont l'image est une fraction rationnelle régulière. Nous aborderons cette question dans le présent paragraphe. Supposons que l'image L d'une certaine fonction est une fraction rationnelle régulière de p :

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}.$$

On demande de trouver l'original. Au § 7 du ch. X du tome I nous avons montré que chaque fraction rationnelle régulière peut être représentée sous forme de somme d'éléments simples de 4 types :

I. $\dfrac{A}{p-a}$,

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$,

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}$, où les racines du dénominateur sont complexes, c'est-à-dire $\dfrac{a_1^2}{4}-a_2<0$,

IV. $\dfrac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, où $k\geqslant 2$, les racines du dénominateur sont complexes.

Trouvons l'original pour chacune des quatre fractions simples. Pour les fractions du type I nous obtenons en vertu de la formule 4 du tableau 1 :

$$\frac{A}{p-a}\doteqdot Ae^{at}.$$

Pour la fraction du type II en vertu des formules 9 et 4 du tableau 1, nous trouvons:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \doteqdot A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}. \tag{37}$$

Considérons maintenant les fractions du type III. Effectuons les transformations suivantes:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=\frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right)+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}+$$

$$+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Désignant ici le premier et le second terme respectivement par M et N, nous obtenons en vertu des formules 8 et 7 du tableau 1:

$$M \doteqdot Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \doteqdot \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}.$$

Ainsi en définitive:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}\doteqdot$$

$$\doteqdot e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right]. \tag{38}$$

Nous ne donnerons pas ici le cas des éléments simples du type IV pour ne pas nous lancer dans des calculs trop fastidieux. Pour quelques cas particuliers cette question sera analysée plus bas.

§ 12. Exemples de résolution des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel

Exemple 1. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3x,$$

vérifiant les conditions initiales $x_0=0$, $x_0'=0$ pour $t=0$.

Solution. Composons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+4)=\frac{3}{p^2+9}, \quad \bar{x}(p)=\frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)}$$

ou

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

d'où nous tirons la solution

$$x(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t.$$

Exemple 2. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0,$$

vérifiant les conditions initiales: $x_0=1$, $x_0'=3$, $x_0''=8$ pour $t=0$.

Solution. Composons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^3+1)=p^2\cdot 1+p\cdot 3+8,$$

nous trouvons

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}.$$

Décomposons la fraction rationnelle obtenue en éléments simples:

$$\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{-p+6}{p^2-p+1}=2\cdot\frac{1}{p+1}-$$

$$-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Utilisant le tableau 1, nous écrivons la solution:

$$x(t)=2e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Exemple 3. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t\cos 2t,$$

vérifiant les conditions initiales: $x=0$, $x_0'=0$ pour $t=0$.

Solution. Ecrivons l'équatiou auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=\frac{1}{p^2+4}-\frac{8}{(p^2+4)^2},$$

d'où

$$\bar{x}(p)=-\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{3}\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Par conséquent,

$$x(t) = -\frac{5}{9}\sin t + \frac{5}{18}\sin 2t + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t\right).$$

Il est évident que la méthode du calcul opérationnel permet aussi de résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires. Montrons-le sur un exemple.

Exemple 4. Trouver la solution du système d'équations

$$3\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0,$$

vérifiant les conditions initiales: $x = 0$, $y = 0$ pour $t = 0$.

Solution. Désignons $x(t) \div \bar{x}(p)$, $y(t) \div \bar{y}(p)$ et écrivons le système d'équations auxiliaires:

$$(3p+2)\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) = \frac{1}{p},$$

$$p\bar{x}(p) + (4p+3)\bar{y}(p) = 0.$$

Résolvant ce système, nous trouvons:

$$\bar{x}(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)},$$

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6}\right).$$

D'après les images nous trouvons chaque fois l'original, c'est-à-dire les solutions cherchées du système:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},$$

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

On résout d'une manière analogue les systèmes linéaires d'ordre supérieur.

§ 13. Théorème de convolution

Lors de la résolution des équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel on se sert souvent du

Théorème de convolution. *Si $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sont les images des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$, c'est-à-dire si*

$$F_1(p) \dot{\rightarrow} f_1(t) \quad \text{et} \quad F_2(p) \dot{\rightarrow} f_2(t),$$

alors $F_1(p)F_2(p)$ est l'image de la fonction

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

autrement dit

$$F_1(p)\,F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{39}$$

Démonstration. Trouvons l'image de la fonction

$$\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau,$$

en partant de la définition de l'image

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int^{\infty} e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right]dt.$$

L'intégrale du second membre est une intégrale double, étendue au domaine limité par les droites $\tau = 0$, $\tau = t$ (fig. 398). Changeons l'ordre d'intégration dans cette intégrale, nous obtenons alors:

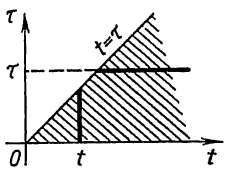


Fig. 398

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^{\infty}\left[f_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}f_2(t-\tau)\,dt\right]d\tau.$$

Effectuant le changement de variable $t - \tau = z$ dans l'intégrale intérieure, nous obtenons:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}f_2(t-\tau)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-p(z+\tau)}f_2(z)\,dz = e^{-p\tau}\int_0^{\infty} e^{-pz}f_2(z)\,dz = e^{-pz}F_2(p).$$

Par conséquent,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right\} = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\,e^{-p\tau}F_2(p)\,d\tau =$$

$$= F_2(p)\int_0^{\infty} e^{-p\tau}f_1(\tau)\,d\tau = F_2(p)\,F_1(p).$$

Ainsi,

$$\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \div F_1(p)\,F_2(p).$$

C'est la formule 15 du tableau 1.

Remarque 1. L'expression $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$ est appelée *convolution* (ou *produit de composition*) des deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$. L'opération du calcul correspondant est appelée *transformation de convolution* de deux fonctions et on a alors

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau.$$

La validité de cette dernière égalité peut être établie en effectuant le changement de variable $t-\tau=z$ dans l'intégrale du second membre.

Exemple. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t),$$

vérifiant les conditions initiales: $x_0 = x_0' = 0$ pour $t = 0$.

Solution. Ecrivons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+1) = F(p),$$

où $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$. Par conséquent, $\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2+1} F(p)$ mais $\frac{1}{p^2+1} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \sin t$ et $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$. Appliquant le théorème de convolution (39) et désignant $\frac{1}{p^2+1}=F_2(p)$, $F(p)=F_1(p)$, nous obtenons

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau. \tag{40}$$

Remarque 2. A l'aide du théorème de convolution on peut trouver aisément l'image de l'intégrale d'une fonction donnée si l'on connaît l'image de cette fonction; autrement dit, si $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$, alors

$$\frac{1}{p} F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \int_0^t f(\tau)\, d\tau. \tag{41}$$

En effet, si nous introduisons les notations

$$f_1(t)=f(t), \quad f_2(t)=1, \quad \text{alors } F_1(p)=F(p), \quad F_2(p)=\frac{1}{p}.$$

Portant ces fonctions dans la formule (39) nous obtenons la formule (41).

§ 14. Equations différentielles des oscillations mécaniques. Equations différentielles de la théorie des circuits électriques

On sait de la mécanique que les oscillations d'un point matériel de masse m sont décrites par l'équation *)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f_1(t); \tag{42}$$

x désignant ici l'écart du point d'une certaine position, k la rigidité du système élastique, par exemple du ressort, la force de résistance au mouvement est proportionnelle (avec un coefficient de proportionnalité λ) au premier degré de la vitesse, $f_1(t)$ est la force extérieure ou de perturbation.

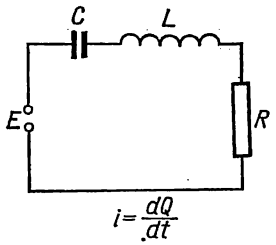


Fig. 399

La solution d'une équation du type (42) décrit également les petites oscillations d'autres systèmes mécaniques à un degré de liberté, par exemple les vibrations de torsion du volant sur un arbre flexible si x est l'angle de rotation du volant, m le moment d'inertie du volant, k la rigidité à la torsion de l'arbre et $mf_1(t)$ le moment des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation. Les équations du type (42) décrivent non seulement les oscillations mécaniques, mais aussi les phénomènes se déroulant dans les circuits électriques.

Soit un circuit électrique, composé d'une inductance L, d'une résistance R et d'une capacité C, auquel est appliquée une force électromotrice E (fig. 399). Désignons par i le courant dans le circuit et par Q la charge du condensateur, alors comme on sait de l'électrotechnique i et Q vérifient les équations suivantes:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E, \tag{43}$$

$$\frac{dQ}{dt}=i. \tag{44}$$

Nous obtenons de l'équation (44):

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{di}{dt}. \tag{44'}$$

Portant (44) et (44') dans l'équation (43) nous obtenons pour Q une équation du type (42):

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E. \tag{45}$$

*) Cf., par exemple, ch. XIII, § 26, où l'on a établi une équation de ce genre lors de l'étude des oscillations d'un poids fixé à un ressort.

Dérivant les deux membres de l'équation (43) et utilisant l'équation (44), nous obtenons l'équation déterminant le courant i :

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt}. \tag{46}$$

Les équations (45) et (46) sont des équations du type (42).

§ 15. Résolution de l'équation différentielle des oscillations

Ecrivons l'équation des oscillations sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t), \tag{47}$$

où le sens mécanique ou physique de la fonction recherchée x, des coefficients a_1, a_2 et de la fonction $f(t)$ est aisément établi en comparant cette équation avec les équations (42), (45), (46). Trouvons la solution de l'équation (47), vérifiant les conditions initiales : $x = x_0$, $x' = x_0'$ pour $t = 0$.

Formons l'équation auxiliaire pour l'équation (47) :

$$\bar{x}(p)(p^2+a_1p+a_2)=x_0p+x_0'+a_1x_0+F(p), \tag{48}$$

où $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$. Nous tirons de l'égalité (48) :

$$\bar{x}(p)=\frac{x_0(p)+x_0'+a_1x_0}{p^2+a_1p+a_2}+\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}. \tag{49}$$

Ainsi, pour la solution $Q(t)$ de l'équation (45), vérifiant les conditions initiales : $Q=Q_0$, $Q'=Q_0'$ pour $t=0$, l'image sera de la forme

$$\bar{Q}(p)=\frac{L(Q_0p+Q_0')+RQ_0}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}+\frac{\bar{E}(p)}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}.$$

Le caractère de la solution dépend essentiellement des racines du trinôme $p^2 + a_1p + a_2$: seront-elles complexes, réelles et distinctes ou réelles et égales. Considérons en détail le cas où les racines du trinôme sont complexes, c'est-à-dire quand $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$. On analysera d'une manière analogue les autres cas.

Comme l'image de la somme de deux fonctions est égale à la somme de leurs images, en vertu de la formule (38) l'original pour la première fraction située dans le second membre de (49) sera de la

forme

$$\frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \doteqdot e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right]. \qquad (50)$$

Trouvons ensuite l'original correspondant à la fraction

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Nous utiliserons ici le théorème de convolution en remarquant que

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \doteqdot \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \qquad F(p) \doteqdot f(t).$$

Par conséquent, nous obtenons d'après la formule (39)

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau)\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (51)$$

Ainsi, nous obtenons de (49) en tenant compte de (50) et (51) :

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau)\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (52)$$

Si la force extérieure $f(t) \equiv 0$, c'est-à-dire si nous sommes en présence d'oscillations mécaniques ou électriques libres, la solution est donnée par le premier terme du second membre de l'expression (52). Si les valeurs initiales sont nulles : $x_0 = x_0' = 0$, alors la solution est donnée par le second terme du second membre de l'egalité (52). Considérons ces cas plus en détail.

§ 16. Etude des oscillations libres

Supposons que l'équation (47) décrit des *oscillations libres*, c'est-à-dire que $f(t) \equiv 0$. Introduisons pour plus de commodité dans l'écriture des formules les notations: $a_1 = 2n$, $a_2 = k^2$, $k_1^2 = k^2 - n^2$. Alors l'équation (47) prendra la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \tag{53}$$

La solution de cette équation x_1 vérifiant les conditions initiales ($x = x_0$, $x' = x_0'$ pour $t = 0$) est donnée par la formule (50) ou par le premier terme de la formule (52):

$$x_1(t) = e^{-nt}\left[x_0 \cos k_1 t + \frac{x_0' + x_0 n}{k_1} \sin k_1 t\right]. \tag{54}$$

Posons $x_0 = a$, $\frac{x_0' + x_0 n}{k_1} = b$. Il est évident que pour tout a et b on peut choisir M et δ de sorte que l'on ait $a = M \sin \delta$, $b = M \cos \delta$, alors $M^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tg} \delta = a/b$. Ecrivons la formule (54) sous la forme:

$$x_1 = e^{-nt}\,[M \cos k_1 t \sin \delta + M \sin k_1 t \cos \delta],$$

on peut alors en définitive écrire la solution ainsi:

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{-nt} \sin (k_1 t + \delta). \tag{55}$$

La solution (55), correspond aux *oscillations amorties*.

Si $2n = a_1 = 0$, c'est-à-dire si l'on néglige le frottement interne, alors la solution sera de la forme

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (k_1 t + \delta).$$

Nous aurons dans ce cas des *oscillations harmoniques*. (Dans le ch. XIII, § 27 sont donnés sur les fig. 276 et 278 les graphiques des oscillations harmoniques et amorties.)

§ 17. Etude des oscillations harmoniques amorties dans le cas d'une force extérieure périodique

Lors de l'étude des oscillations élastiques des systèmes mécaniques et particulièrement lors de l'étude des oscillations électriques, on est amené à considérer divers types de forces extérieures $f(t)$. Etudions en détail le cas d'une force extérieure périodique. Supposons que l'équation (47) soit de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = A \sin \omega t. \tag{56}$$

Pour élucider la nature du mouvement il suffit de considérer le cas où $x_0 = x_0' = 0$. On pourrait obtenir la solution de l'équation d'après la formule (52), mais il est plus commode ici du point de vue méthodique d'obtenir la solution en effectuant tous les calculs intermédiaires.

Ecrivons l'équation de l'image

$$\bar{x}(p)(p^2+2np+k^2) = A\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

d'où nous obtenons :

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2+2np+k^2)(p^2+\omega^2)} \tag{57}$$

Considérons le cas où $2n \neq 0$ $(n^2 < k^2)$. Décomposons la fraction du second membre en fractions simples :

$$\frac{A\omega}{(p^2+2np+k^2)(p^2+\omega^2)} = \frac{Np+B}{p^2+2np+k^2} + \frac{Cp+D}{p^2+\omega^2}. \tag{58}$$

Nous déterminons les constantes N, B, C, D par la méthode des coefficients indéterminés. Utilisant la formule (38) nous tirons de (57) l'original

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}\left\{(k^2-\omega^2)\sin\omega t - 2n\omega\cos\omega t + \right.$$
$$\left. + e^{-nt}\left[(2n^2-k^2+\omega^2)\frac{\omega}{k_1}\sin k_1 t + 2n\omega\cos k_1 t\right]\right\}; \tag{59}$$

ici de nouveau $k_1 = \sqrt{k^2-n^2}$. C'est précisément la solution de l'équation (56), vérifiant les conditions initiales : $x_0 = x_0' = 0$ pour $t = 0$.

Considérons le cas particulier $2n = 0$. Dans un système mécanique par exemple, cela correspond au cas où il n'y a pas de résistance interne, pas d'amortisseurs. Pour un contour électrique cela correspond au cas où $R = 0$, autrement dit que la résistance interne du circuit est nulle. L'équation (56) prend alors la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\sin\omega t, \tag{60}$$

et nous obtiendrons la solution de cette équation vérifiant les conditions $x_0 = x_0' = 0$ pour $t = 0$, si nous posons dans la formule (59) $n = 0$:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)k}[-\omega\sin kt + k\sin\omega t]. \tag{61}$$

Nous avons ici la somme de deux oscillations harmoniques : les oscillations propres de fréquence k :

$$x_{\text{pr}}(t) = -\frac{A}{k^2-\omega^2}\frac{\omega}{k}\sin kt$$

et les oscillations forcées de fréquence ω :

$$x_{\text{forc}}(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Dans le cas où $k \gg \omega$, le caractère des oscillations est représenté sur la fig. 400.

Revenons encore une fois à la formule (59). Si $2n > 0$, ce qui a lieu pour les systèmes mécaniques et électriques considérés, le terme, contenant le facteur e^{-nt} et représentant les oscillations propres amorties, décroît rapidement lorsque t croît. Pour les t suffisamment grands, le caractère des oscillations est déterminé par le terme ne recelant pas le facteur e^{-nt}, c'est-à-dire le terme

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \{(k^2 - \omega^2) \sin \omega t - \\ - 2n\omega \cos \omega t\}. \qquad (62)$$

Introduisons les notations :

$$\frac{A(k^2-\omega^2)}{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2} = M \cos \delta ; \\ -\frac{A \cdot 2n\omega}{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2} = M \sin \delta, \qquad (63)$$

où

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}.$$

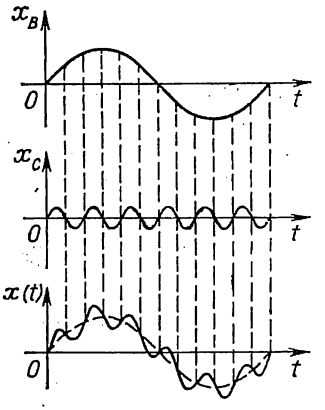


Fig. 400

On peut écrire ainsi la solution (62) :

$$x(t) = \frac{A}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^4}}} \sin(\omega t + \delta). \qquad (64)$$

Il découle de la formule (64) que la fréquence k des oscillations forcées ne correspond pas à la fréquence ω de la force extérieure. Si la résistance interne caractérisée par le nombre n est faible et si la fréquence ω est proche de la fréquence k, l'amplitude des oscillations peut être rendue arbitrairement grande, car le dénominateur peut être rendu aussi petit que l'on veut. Pour $n = 0$, $\omega^2 = k^2$, la solution ne s'exprime pas par la formule (64).

§ 18. Solution de l'équation des oscillations dans le cas de la résonance

Considérons le cas particulier $a_1 = 2n = 0$, c'est-à-dire quand la résistance est nulle, et la fréquence de la force extérieure coïncide avec la fréquence des oscillations propres $k = \omega$. Dans ce cas l'équa-

tion prend la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=A\sin kt. \tag{65}$$

Nous cherchons une solution de cette équation vérifiant les conditions initiales: $x_0=0$, $x_0'=0$ pour $t=0$. L'équation auxiliaire sera

$$\bar{x}(p)(p^2+k^2)=A\frac{k}{p^2+k^2},$$

d'où

$$\bar{x}(p)=\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2}. \tag{66}$$

Nous avons obtenu une fraction rationnelle régulière du type IV que nous n'avons pas étudiée sous sa forme générale. Pour trouver l'original de l'image (66) nous aurons recours à l'artifice suivant. Ecrivons l'identité (formule 2, tableau 1)

$$\frac{k}{p^2+k^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\sin kt\,dt. \tag{67}$$

Dérivons*) les deux membres de cette égalité par rapport à k:

$$\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}t\cos kt\,dt.$$

Utilisant l'égalité (67), nous écrirons ainsi cette égalité:

$$-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\left[t\cos kt-\frac{1}{k}\sin kt\right]dt.$$

Il en découle immédiatement:

$$\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2}\dot{\rightarrow}\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cos kt\right)$$

(nous obtenons de cette formule la formule 13 du tableau 1). Ainsi la solution de l'équation (65) sera

$$x(t)=\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cos kt\right) \tag{68}$$

Etudions le second terme de cette solution

$$x_2(t)=-\frac{A}{2k}t\cos kt; \tag{68'}$$

*) L'intégrale du second membre peut être représentée sous la forme d'une somme de deux intégrales de la variable réelle dont chacune dépend du paramètre k.

lorsque t croît, cette quantité n'est pas bornée. L'amplitude des oscillations correspondant à la formule (68′) augmente indéfiniment lorsque t croît indéfiniment. Par conséquent, l'amplitude des oscillations correspondant à la formule (68) augmente aussi indéfiniment. Ce phénomène qui a lieu quand la fréquence des oscillations propres coïncide avec la fréquence de la force extérieure est appelé *résonance* (cf. également ch. XIII, § 28, fig. 280).

§ 19. Théorème du retard

Supposons que la fonction $f(t)$ soit identiquement nulle pour $t < 0$ (fig. 401, *a*). Alors la fonction $f(t - t_0)$ sera identiquement nulle pour $t < t_0$ (fig. 401, *b*). Démontrons le théorème du retard suivant.

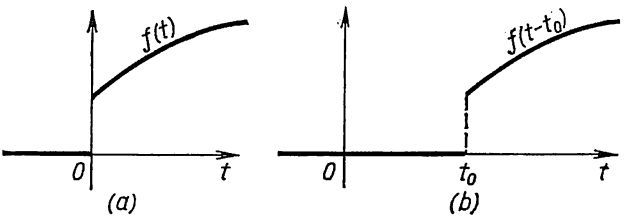


Fig. 401

Théorème. *Si $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$, alors $e^{-pt_0}F(p)$ est l'image de la fonction $f(t - t_0)$, c'est-à-dire si $f(t) \leftarrow\!\div F(p)$, alors*

$$f(t - t_0) \leftarrow\!\div e^{-pt_0}F(p). \tag{69}$$

Démonstration. Par définition de l'image nous avons:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-pt}f(t-t_0)\,dt =$$

$$= \int_0^{t_0} e^{-pt}f(t-t_0)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt}f(t-t_0)\,dt.$$

La première intégrale du second membre de l'égalité est nulle car $f(t - t_0) = 0$ lorsque $t < t_0$. Effectuons dans la seconde intégrale un changement de variable en posant $t - t_0 = z$:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-p(z+t_0)}f(z)\,dz = e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-pz}f(z)\,dz = e^{-pt_0}F(p).$$

Ainsi, $f(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0} F(p)$.

Exemple. Nous avons établi au § 2 pour la fonction unité de Heaviside : $\sigma_0(t) \overset{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{p}$. Il découle en vertu du théorème démontré que pour la

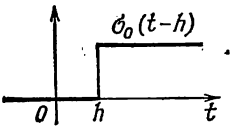


Fig. 402

fonction $\sigma_0(t-h)$ représentée sur la fig. 402 l'image L sera $\frac{1}{p}e^{-ph}$, c'est-a-dire

$$\sigma_0(t-h) \overset{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{p} e^{-ph}. \tag{70}$$

§ 20. La fonction delta et son image

Considérons la fonction

$$\sigma_1(t, h) = \frac{1}{h}[\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)] = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0, \\ \frac{1}{h} \text{ pour } 0 \leqslant t < h, \\ 0 \text{ pour } h \leqslant t, \end{cases} \tag{71}$$

représentée sur la fig. 403.

Si l'on assimile cette fonction à une force agissant pendant un intervalle de temps de 0 à h, le reste du temps étant nul, il est évident que l'impulsion de cette force est égale à l'unité.

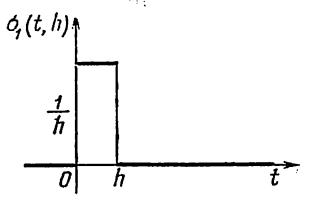


Fig. 403

D'après les formules (8) et (70) l'image de cette fonction est

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ph}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sigma_1(t, h) \doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{1-e^{-ph}}{h}\right). \tag{72}$$

En mécanique il est commode de considérer les forces agissant pendant un très bref intervalle de temps comme des forces d'une action instantanée mais d'une impulsion finie. C'est pourquoi on introduit la fonction $\delta(t)$ en tant que limite de la fonction $\sigma_1(t, h)$

lorsque $h \to 0$:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \sigma_1(t, h) \text{ *)}. \tag{73}$$

Cette fonction est appelée *fonction unité* ou *fonction delta*.

Posons naturellement

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{74}$$

On écrit également

$$\int_{0}^{0} \delta(t)\, dt = 1. \tag{75}$$

Notons que la fonction $\delta(x)$ est utilisée non seulement en mécanique; on la trouve dans de nombreuses branches des mathématiques et notamment dans la résolution de nombreuses équations de la physique mathématique.

Considérons l'action $\delta(t)$ si elle est assimilée à une force. Cherchons la solution de l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \delta(t) \tag{76}$$

vérifiant les conditions initiales $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ pour $t = 0$. De l'équation (76) et compte tenu de (75) il vient

$$v = \frac{ds}{dt} = \int_{0}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = 1 \tag{77}$$

quel que soit t, et en particulier pour $t = 0$. Par conséquent, en définissant $\delta(x)$ au moyen de l'égalité (73), on peut assimiler cette fonction à une force communiquant à un point matériel de masse égale à l'unité, à l'instant $t = 0$, une vitesse égale à l'unité.

Définissons l'image L de la fonction $\delta(t)$ comme la limite de l'image de la fonction $\sigma_1(t, h)$ lorsque $h \to 0$:

$$L\{\delta(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{-ph}}{h} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$$

(pour établir cette limite on s'est servi de la règle de L'Hospital). Donc

$$\delta(t) \doteq 1. \tag{78}$$

On définit ensuite la fonction $\delta(t - t_0)$ que l'on peut assimiler à une force communiquant pendant un temps très court, à l'instant

*) Il ne faut pas perdre de vue que $\delta(t)$ n'est pas une fonction dans le sens habituel de ce terme. (Bien des auteurs physiciens l'appellent fonction de Dirac.)

$t = t_0$, à une masse égale à l'unité, une vitesse égale à l'unité. Il est évident qu'en vertu du théorème du retard nous aurons :

$$\delta(t - t_0) \div e^{-pt}. \tag{79}$$

Par analogie avec (75) on peut écrire :

$$\int_{t_0}^{t_0} \delta(t - t_0)\, dt = 1. \tag{80}$$

De l'interprétation mécanique que nous venons de donner il résulte que si la fonction delta se trouve dans le deuxième membre d'une équation elle peut en être éliminée par un changement adéquat des conditions initiales. Illustrons ce que nous venons de dire par un exemple simple. Soit à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + \delta(t) \tag{81}$$

avec les conditions initiales : $x_0 = 0$, $x_0' = 0$ pour $t = 0$. L'équation auxiliaire est

$$p^2\bar{x}(p) = F(p) + 1, \tag{82}$$

d'où

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

D'après les formules (9) et (15) du tableau il vient

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)(t - \tau)\, d\tau + t. \tag{83}$$

Nous aurions abouti à ce même résultat si nous avions eu à résoudre l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

avec les conditions initiales : $x_0 = 0$, $x_0' = 1$ pour $t = 0$. Dans ce cas l'équation auxiliaire aurait été :

$$p^2\bar{x}(p) - 1 = F(p). \tag{84}$$

Elle est équivalente à l'équation auxiliaire (82) et sa solution coïncidera, par conséquent, avec la solution (83).

En conclusion nous allons noter une importante propriété de la fonction delta. D'après les égalités (74) et (75) nous pouvons écrire

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\infty < t < 0, \\ 1 & \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{85}$$

c'est-à-dire que cette intégrale est égale à la fonction unité $\sigma_0(t)$ de Heaviside.

Par conséquent,

$$\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau. \tag{86}$$

En dérivant par rapport à t les deux membres de l'égalité, nous obtenons l'égalité conditionnelle

$$\sigma_0'(t) = \delta(t). \tag{87}$$

Pour mieux comprendre le sens de l'égalité conditionnelle (87) considérons la fonction $\bar{\sigma}_0(t, h)$ représentée sur la fig. 404. Il est évident que

$$\bar{\sigma}_0'(t, h) = \sigma_1(t, h) \tag{88}$$

(à l'exception des points $t = 0$ et $t = h$). En passant à la limite

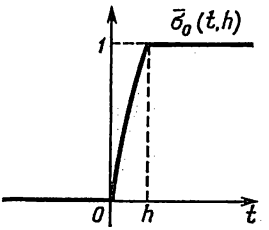


Fig. 404

lorsque $h \to 0$ dans l'égalité (88), on voit que $\bar{\sigma}_0(t, h) \to \sigma_0(t)$ ce qu'on note par

$$\bar{\sigma}_0'(t, h) \to \sigma_0'(t) \text{ lorsque } h \to 0.$$

Le deuxième membre de l'égalité (88) $\sigma_1(t, h) \to \delta(t)$ lorsque $h \to 0$. Par conséquent, l'égalité (88) prend la forme de l'égalité conditionnelle (87).

Exercices

Trouver la solution des équations suivantes pour les conditions initiales données:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$, $x = 1$, $x' = 2$ pour $t = 0$. Rép. $x = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.
2. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $x = 2$, $x' = 0$, $x'' = 1$ pour $t = 0$. Rép. $x = 1 - t + e^t$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2}-2a\frac{dx}{dt}+(a^2+b^2)\,x=0,\quad x=x_0,\quad x'=x'_0$ pour $t=0$. Rép. $x=$ $=\frac{e^{at}}{b}\,[x_0 b\cos bt+(x'_0-x_0 a)\sin bt]$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^{5t},\quad x=1,\quad x'=2$ pour $t=0$. Rép. $x=\frac{1}{12}\,e^{5t}+$ $+\frac{1}{4}\,e^{t}+\frac{2}{3}\,e^{2t}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=a\cos nt,\ x=x_0,\ x'=x'_0$ pour $t=0$.

Rép. $x=\frac{a}{m^2-n^2}\,(\cos nt-\cos mt)+x_0\cos mt+\frac{x'_0}{m}\sin mt$.

6. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2,\ x=0,\ x'=0$ pour $t=0$. Rép. $x=2e^t-\frac{1}{3}\,t^3-t^2-2t-2$.

7. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=\frac{1}{2}\,t^2e^t,\ x=x'=x''=0$ pout $t=0$. Rép. $x=\frac{1}{4}\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right)e^t-$ $-\frac{1}{24}e^{-t}-\frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{\frac{1}{2}t}$.

8. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=1,\ x_0=x'_0=x''_0=0$ pour $t=0$.

Rép. $x=1-\frac{1}{3}\,e^{-t}-\frac{2}{3}\,e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}+x=\sin t,\ x_0=x'_0=x''_0=x'''_0=0$ pour $t=0$.

Rép. $x=\frac{1}{8}\,[e^t(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\sin t]$.

10. Trouver la solution du système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2}+y=1,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+x=0,$$

vérifiant les conditions initiales $x_0=y_0=x'_0=y'_0=0$ pour $t=0$.

$$\text{Rép. } x(t)=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\,e^t+\frac{1}{4}\,e^{-t},$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}\,e^t-\frac{1}{4}\,e^{-t}+1.$$

Chapitre XX

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS ET DE LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

L'expérience de tous les jours confirme que dans de nombreuses situations pratiques de la vie courante, ainsi que lors des recherches scientifiques nous sommes continuellement confrontés avec des situations pour lesquelles les lois du déterminisme rigoureux auxquelles nous sommes familiarisées depuis notre enfance ne sont plus valables. Citons quelques exemples. Supposons que nous nous intéressons au nombre d'appels qu'un service d'ambulance reçoit tout au long de la journée.

De nombreuses observations montrent, qu'il n'est pas possible de prévoir avec exactitude le nombre d'appels que recevra le service au cours des journées à venir. Ce nombre est soumis à des fluctuations importantes et aléatoires. Le temps que devra passer le médecin au chevet du malade à partir du moment de l'appel de l'ambulance est également aléatoire.

Si on met à l'essai un certain nombre N de pièces quelconques, fabriquées semblerait-il dans des conditions identiques à partir des mêmes matériaux, le temps s'écoulant entre le début de l'essai jusqu'à la mise hors d'usage de la pièce (jusqu'à l'état de rebut) s'avère aléatoire et soumis à une fluctuation assez forte.

Quand on procède à un tir au but on observe une dispersion des projectiles. Il n'est pas possible d'indiquer à l'avance l'écart entre le point d'impact du projectile et le centre de l'objectif, c'est une grandeur aléatoire.

La simple constatation du caractère aléatoire d'un événement est absolument insuffisante pour que l'on puisse utiliser efficacement un phénomène naturel, ou contrôler un processus technologique; il convient d'apprendre à estimer quantitativement les événements aléatoires et à prévoir leur déroulement. C'est là l'exigence impérieuse des problèmes théoriques et pratiques.

Deux disciplines mathématiques, la théorie des probabilités et la statistique mathématique, s'occupent précisément de la solution des problèmes qui se posent dans ce domaine et de la création d'une théorie mathématique générale. La théorie des probabilités et ses applications dans les nouvelles branches de la science se sont largement développées ces derniers temps grâce notamment aux recher-

ches des savants soviétiques. Il importe de citer tout d'abord les travaux de A. Kolmogorov, B. Gnedenko, N. Smirnov.

Nous exposerons dans ce chapitre les éléments de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique.

§ 1. Evénement aléatoire. Fréquence relative d'un événement aléatoire. Probabilité d'un événement. Objet de la théorie des probabilités

La notion fondamentale de la théorie des probabilités est celle d'*événement aléatoire*. On appelle événement aléatoire un événement qui pour certaines conditions peut soit se réaliser, soit ne pas se réaliser.

Exemple 1. L'apparition du côté face, quand on jette une pièce de monnaie, est un événement aléatoire.

Exemple 2. Le fait d'atteindre le but visé au cours d'un tir est un événement aléatoire.

Exemple 3. Lors de la fabrication d'un cylindre d'un diamètre requis de 20 cm, le fait de commettre une erreur inférieure à 0,2 mm avec les moyens de production dont on dispose est un événement aléatoire.

Définition 1. On appelle *fréquence relative* p^* d'un événement aléatoire A le rapport m^* du nombre de réalisations de cet événmeent au nombre total n^* d'épreuves identiques réalisées au cours desquelles l'événement donné aurait pu ou non se produire. Nous écrirons :

$$\mathbf{P}^*(A) = p^* = \frac{m^*}{n^*}. \tag{1}$$

Il découle de l'observation de divers phénomènes que si le nombre d'épreuves dans chaque série est pratiquement peu élevé, les fréquences relatives de l'apparition de l'événement A dans chaque série peuvent notablement différer l'une de l'autre. Si le nombre d'épreuves dans les séries est élevé, alors, en règle générale, les fréquences relatives de l'apparition de l'événement A dans les diverses séries différeront peu les unes des autres et ceci d'autant plus que le nombre d'épreuves dans les séries est élevé. On dit alors que pour un nombre élevé d'épreuves la fréquence relative présente de moins en moins un caractère aléatoire. Notons toutefois qu'il existe des événements à fréquence instable, de sorte que ses valeurs, même pour de très grandes séries, peuvent fortement différer les unes des autres.

L'expérience montre que, dans la grande majorité des cas, il existe un nombre constant p tel que les fréquences relatives de la réalisation de l'événement A pour un grand nombre d'épreuves répétées diffèrent très peu, quelques rares cas excepté, de ce nombre p.

Ce fait empirique s'écrit symboliquement de la manière suivante :

$$\frac{m^*}{n^*} \xrightarrow[n^* \to \infty]{} p. \tag{2}$$

Le nombre p est appelé *probabilité* de la réalisation de l'événement aléatoire A. L'écriture symbolique de cette phrase est alors

$$\mathbf{P}(A) = p. \tag{3}$$

La probabilité p est une caractéristique objective de l'éventualité de la réalisation de l'événement A pour les épreuves données, définie par la nature de l'événement A.

La fréquence relative diffère peu pour un nombre élevé d'épreuves de la probabilité, exception faite de « cas très rares » dont on peut souvent négliger l'éventualité.

La relation (2) est habituellement formulée de la manière suivante :

Quand le nombre d'épreuves (expériences répétées) n^* *augmente indéfiniment la fréquence relative de l'événement* A *tend vers la probabilité* p *de la réalisation de cet événement.*

R e m a r q u e. Dans nos raisonnements précédents nous avons postulé à l'appui de faits empiriques la relation (2). On peut également postuler d'autres conditions naturelles, découlant de l'expérience. Dans ce cas on pourra établir la relation (2), qui sera alors un théorème. C'est le théorème bien connu en théorie des probabilités de J. Bernoulli (1654-1705).

La probabilité étant une caractéristique objective de l'éventualité de la réalisation d'un certain événement, on doit savoir, pour prévoir la nature du déroulement de nombreux processus, que l'on considère dans la gestion de la production, l'économie, la science militaire, etc., déterminer la probabilité de la réalisation de certains événements complexes. La détermination de la probabilité de la réalisation d'un événement d'après les probabilités des événements élémentaires conditionnant l'événement complexe considéré, l'étude des lois probabilistes régissant les divers événements aléatoires constituent l'objet de la *théorie des probabilités.*

§ 2. Définition classique de la probabilité et calcul direct des probabilités

Dans de nombreux cas, l'analyse de l'épreuve correspondante permet de calculer la probabilité de l'événement aléatoire considéré.

Pour expliciter l'exposé qui suivra considérons l'exemple suivant.

E x e m p l e 1. Nous appellerons dé à jouer un cube homogène, sur les faces duquel sont notés les chiffres de 1 à 6. Considérons l'événement aléatoire consistant en l'apparition du nombre l ($1 \leqslant l \leqslant 6$) sur la face supérieure du cube quand on jette le dé. Comme, en vertu de la symétrie du dé, les événements

consistant en l'apparition d'un certain nombre compris entre 1 et 6 sont également probables, on les appelle *équiprobables*. Quand on jette le dé un grand nombre de fois on peut s'attendre à ce que le nombre l, de même que chacun des nombres compris entre 1 et 6 apparaîtra sur la face supérieure du dé environ $\frac{n}{6}$ fois. C'est là un fait confirmé par l'expérience.

La fréquence relative sera proche du nombre $p^* = \frac{1}{6}$. C'est pourquoi on estime que la probabilité de l'apparition du nombre l, de même que de tout autre nombre compris entre 1 et 6, sur la face supérieure du dé, est égale à $\frac{1}{6}$.

Nous passerons maintenant à l'analyse des événements aléatoires dont les probabilités peuvent être calculées directement.

Définition 1. Des événements aléatoires sont dits *incompatibles* pour une épreuve donnée s'il est exclu qu'au cours de cette épreuve deux d'entre eux puissent avoir lieu simultanément.

Définition 2. Nous dirons que les événements aléatoires forment un *système exhaustif* (ou *complet*), si au cours de chaque épreuve chacun d'entre eux peut être réalisé, tout en excluant la réalisation de tout autre événement incompatible avec eux.

Considérons le *système exhaustif d'événements aléatoires équiprobables et incompatibles*. Nous appellerons ces événements des *cas* (ou *chances*).

Un cas de ce système est dit *favorable* à la réalisation de l'événement A, si l'apparition de ce cas implique la réalisation de l'événement A.

Exemple 2. Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. Les boules affectées des chiffres 1, 2 et 3 sont rouges, les autres sont noires. Le tirage de la boule numéro 1 (de même que des boules numéro 2 ou 3) est un événement favorisant l'apparition d'une boule rouge.

Pour le cas considéré on peut donner une définition du concept de probabilité différente de celle du § 1.

Définition 3. On appelle *probabilité* p de l'événement A le rapport du nombre m de cas favorables au nombre n de tous les cas possibles constituant le système exhaustif d'événements équiprobables incompatibles, ou symboliquement

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Définition 4. Si tous les n cas formant un système exhaustif d'événements équiprobables incompatibles sont favorables à la réalisation d'un événement quelconque, un tel événement est dit *certain*; la probabilité d'un événement certain est $p = 1$.

Un événement auquel aucun des n cas formant un système exhaustif d'événements équiprobables incompatibles n'est favorable est dit événement *impossible*; sa probabilité $p = 0$.

Remarque 1. Les affirmations inverses sont également vraies dans ce cas. Toutefois dans d'autres cas, par exemple, dans

le cas d'une variable aléatoire continue (§ 12), les affirmations inverses peuvent être fausses, en d'autres termes le fait, que la probabilité d'un événement est égale à 1 ou à 0, n'implique pas nécessairement que cet événement est certain ou impossible.

Il découle de la définition de la probabilité qu'elle vérifie la relation

$$0 \leqslant p \leqslant 1.$$

Exemple 3. On choisit une carte dans un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité pour que ce soit un pique ?

Solution. Nous avons ici le schéma des cas équiprobables. L'événement A consiste en l'apparition d'une carte de pique. Le nombre totale de cas est $n = 36$. Le nombre de cas favorables à l'événement A est $m = 9$. Nous avons, par conséquent, $p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Exemple 4. On jette simultanément deux pièces. Quelle est la probabilité d'amener face sur les deux pièces ?

Solution. Composons le schéma des cas possibles.

	Première pièce	Seconde pièce
1er cas	face	face
2ième cas	face	pile
3ième cas	pile	face
4ième cas	pile	pile

Nous avons en tout 4 cas possibles, dont un seul est favorable. Par conséquent, la probabilité d'amener face sur les deux pièces est $p = \frac{1}{4}$.

Exemple 5. La probabilité d'atteindre un objectif est $\frac{8}{10}$ quand le tir est exécuté avec une première arme et $\frac{7}{10}$ quand il est exécuté avec une seconde arme. Trouver la probabilité de toucher la cible, si le tir est effectué simultanément avec les deux armes. On estime que la cible est atteinte, s'il est touché par l'une au moins des armes.

Solution. On peut simuler ce problème de la manière suivante. Deux urnes contiennent chacune 10 boules numérotées de 1 à 10. La première urne contient 8 boules rouges et 2 noires, la seconde 7 boules rouges et 3 noires. On retire une par une les boules de chaque urne. Quelle est la probabilité que l'une au moins des 2 boules retirées soit rouge ?

Comme n'importe quelle boule de la première urne peut être retirée avec n'importe quelle boule de la seconde urne, le nombre de cas est 100, ainsi $n = 100$.

Calculons le nombre de cas favorables.

Lors du prélèvement de chacune des 8 boules rouges de la première urne simultanément avec une boule quelconque de la seconde urne, il y aura parmi les boules sorties au moins une boule rouge. Le nombre de tels cas est $10 \times 8 = 80$. Lors du prélèvement de chacune des deux boules noires de la première

urne simultanément avec chacune des 7 boules rouges de la seconde urne il y aura une boule rouge parmi les boules sorties. Le nombre de ces cas sera $2 \times 7 = 14$. Le nombre total de cas favorables sera ainsi $m = 80 + 14 = 94$.

La probabilité pour qu'il y ait parmi les boules sorties au moins une boule rouge est

$$p = \frac{m}{n} = \frac{94}{100}.$$

C'est précisément la probabilité de tire au but.

Remarque 2. Dans cet exemple nous avons ramené le problème du calcul de la probabilité de tir au but au problème de la probabilité de l'apparition de telle ou telle boule lors du prélèvement des boules d'une urne. De nombreux problèmes du calcul des probabilités peuvent ainsi être réduits à ce « schéma à urnes ». C'est pourquoi les problèmes du prélèvement des boules d'une urne peuvent être considérés comme des *problèmes généralisés*.

Exemple 6. Un lot de 100 articles recèle 10 pièces défectueuses. Quelle est la probabilité pour que parmi 4 pièces prises au hasard trois soient sans défaut.

Solution. Il existe $n = C_{100}^4$ manières de choisir 4 pièces dans un lot de 100. Le nombre de cas pour lesquels 3 des 4 pièces prélevées seront sans défauts est égal à $m = C_{90}^3 \cdot C_{10}^1$.

La probabilité cherchée sera alors:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = \frac{1424}{4753} \approx 0{,}3.$$

§ 3. Somme des probabilités. Evénements aléatoires contraires

Définition 1. On appelle *somme de deux* événements A_1 et A_2 l'événement C, consistant en la réalisation de l'un au moins de ces deux événements.

Nous considérerons plus bas la probabilité de la somme de deux événements incompatibles A_1 et A_2. Désignons la somme de ces événements par

$$A_1 + A_2$$

ou encore

$$A_1 \quad \text{ou} \quad A_2 \text{ *)}.$$

Passons maintenant au théorème suivant, dit *théorème d'addition des probabilités* (ou des probabilités totales).

Théorème 1. *Supposons qu'au cours d'une épreuve (phénomène, expérience) un événement aléatoire A_1 de probabilité* $\mathbf{P}(A_1)$ *et un évé-*

*) Remarquons, que dans cette expression le mot « ou » ne possède pas le caractère d'exclusion mais signifie simplement que l'un au moins de ces événements se réalisera conformément à la définition 1.

nement A_2 de probabilité $\mathbf{P}(A_2)$ *puissent être réalisés. Les événements A_1 et A_2 sont incompatibles. La probabilité de la somme de ces événements, c'est-à-dire de l'événement consistant en la réalisation ou bien de l'événement A_1, ou bien de l'événement A_2, est alors calculée d'après la formule*

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ ou } A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2). \tag{1}$$

Démonstration. Soit

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{m_1}{n}, \quad \mathbf{P}(A_2) = \frac{m_2}{n}.$$

Les événements A_1 et A_2 étant incompatibles pour un nombre total n de cas, le nombre de cas favorables à la réalisation simultanée des événements A_1 et A_2, est égal à 0, et le nombre de cas favorables à la réalisation ou bien de l'événement A_1, ou bien de l'événement A_2 est égal à $m_1 + m_2$. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ ou } A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut démontrer d'une manière analogue ce théorème pour un nombre arbitraire de termes

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n). \tag{1'}$$

Cette dernière égalité s'écrit encore :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i). \tag{1''}$$

Remarque. Nous avons démontré le théorème d'addition pour le schéma des cas, quand la probabilité peut être déterminée par un calcul direct. Nous estimerons par la suite que le théorème de l'addition des probabilités est également valable dans le cas, où il n'est pas possible d'effectuer le calcul direct des probabilités. Cette affirmation est basée sur les considérations suivantes. Les probabilités des événements pour un grand nombre d'expériences sont proches (à de rares exceptions près) des fréquences relatives, et pour ces dernières la démonstration peut être conduite exactement de la même manière, qu'il a été fait plus haut. Cette remarque concerne également les démonstrations des théorèmes suivants, qui feront appel au schéma à urnes.

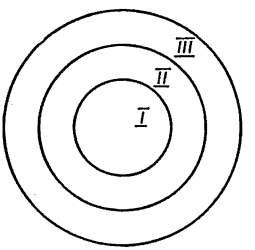


Fig. 405

Exemple 1. On effectue un tir au but D composé de 3 zones disjointes (fig. 405). La probabilité de tomber dans la zone I est : $\mathbf{P}(A_1) = \frac{5}{100}$, celle

de tomber dans la zone II est: $\mathbf{P}(A_2) = \frac{10}{100}$ et celle de tomber dans la zone III est: $\mathbf{P}(A_3) = \frac{17}{100}$. Quelle est la probabilité de tomber dans la zone D ? L'événement A consiste dans le fait de tomber dans le domaine D. D'après la formule (1') nous avons:

$$\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{17}{100}=\frac{32}{100}.$$

D é f i n i t i o n 2. Deux événements sont dits *contraires*, s'ils sont incompatibles et s'ils constituent un système (exhaustif).

Si nous désignons par A l'un des événements, nous désignerons l'événement contraire par $\overline{A}$.

Supposons que la probabilité de réalisation de l'événement A est p, alors nous désignerons la probabilité de la non-réalisation de l'événement A, c'est-à-dire la probabilité de la réalisation de l'événement $\overline{A}$, par $\mathbf{P}(\overline{A}) = q$.

Comme au cours de l'expérience il se réalisera absolument soit l'événement A, soit l'événement $\overline{A}$, nous obtiendrons en vertu du théorème (1):

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1,$$

autrement dit la *somme des probabilités des événements contraires est égale à l'unité*:

$$p + q = 1. \tag{2}$$

E x e m p l e 2. On effectue une certaine mesure. Désignons par A le fait d'obtenir des erreurs inférieures à λ. Soit $\mathbf{P}(A) = p$. L'événement contraire, c'est-à-dire le fait d'obtenir une erreur supérieure ou égale à λ, est l'événement $\overline{A}$. La probabilité de cet événement est $\mathbf{P}(\overline{A}) = q = 1 - p$.

C o r o l l a i r e 1. *Si les événements aléatoires $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent un système exhaustif d'événements incompatibles, on a l'égalité*

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) = 1. \tag{3}$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent un système exhaustif d'événements la réalisation de l'un de ces événements est un événement certain. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ ou } A_2, \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_n) = 1.$$

Transformant le premier membre d'après la formule (1') nous obtenons l'égalité (3).

D é f i n i t i o n 3. Les événements aléatoires A et B sont dits *compatibles*, si au cours d'une épreuve donnée les deux événements peuvent avoir lieu, autrement dit, si les événements A et B peuvent être réalisés *simultanément*.

Nous désignerons par (A ou B) ou (AB) l'événement consistant en la réalisation simultanée des événements A et B. Nous désignerons la probabilité de la réalisation simultanée des événements A et B par $\mathbf{P}$ (A et B).

Théorème 2. *La probabilité de la somme de deux événements compatibles est déterminée par la formule*

$$\mathbf{P}\,(A \text{ ou } B) = \mathbf{P}\,(A) + \mathbf{P}\,(B) - \mathbf{P}\,(A \text{ et } B). \tag{4}$$

Nous donnerons une illustration géométrique de la formule (4). Introduisons d'abord la définition suivante.

Définition 4. Soit donné un domaine D dont l'aire est égale à S. Considérons le domaine d faisant partie de D et dont l'aire est égale à $\overline{S}$. Si le fait pour le point de tomber dans le domaine D

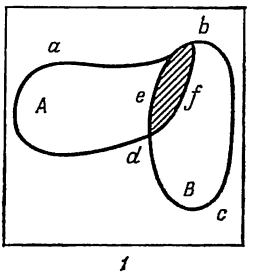


Fig. 406

est un événement certain, la probabilité pour le point de tomber dans le domaine d sera alors, par définition, égale à $\frac{\overline{S}}{S}$, autrement dit $p = \frac{\overline{S}}{S}$. Cette probabilité est appelée *probabilité géométrique.*

Nous avons alors, en estimant pour le point que le fait de tomber dans le carré de côté égal à 1 constitue un événement certain (fig. 406) :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}\,(A \text{ ou } B) &= \text{aire } abcda, \\ \mathbf{P}\,(A) &= \text{aire } abfda, \\ \mathbf{P}\,(B) &= \text{aire } bcdeb, \\ \mathbf{P}\,(A \text{ et } B) &= \text{aire } debfd. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Il est évident qu'on a l'égalité

$$\text{aire } abcda = \text{aire } abfda + \text{aire } bcdeb - \text{aire } debfd.$$

Portant dans cette égalité les premiers membres des égalités (5), nous obtenons l'égalité (4).

Nous pouvons calculer d'une manière analogue la probabilité de la somme d'un nombre quelconque d'événements aléatoires compatibles.

Notons que l'on peut démontrer le théorème 2, en partant des définitions et des règles des opérations énoncées plus haut.

§ 4. Produit des probabilités des événements indépendants

Définition 1. On dit que l'événement A est *indépendant* de l'événement B, si la probabilité de la réalisation de l'événement B ne dépend pas du fait que l'événement B se soit produit ou non.

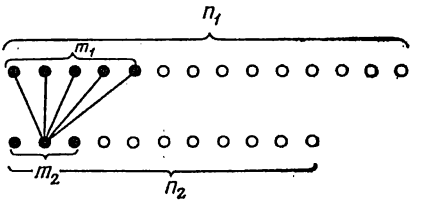


Fig. 407

Théorème 1. *Si les événements aléatoires A et B sont indépendants, la probabilité de la réalisation simultanée des événements A et B est égale au produit des probabilités de réalisation des événements A et B:*

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B). \tag{1}$$

Démonstration. Utilisons pour la démonstration de ce théorème le schéma à urnes. Chaque urne contient respectivement n_1 et n_2 boules. Dans la première urne il y a m_1 boules rouges et les autres noires et dans la deuxième urne m_2 boules rouges, le restant étant noir. On retire une boule de chaque urne. Quelle est la probibilité pour que les deux boules retirées soient rouges?

Appelons événement A le fait de retirer une boule rouge de la première urne, et événement B le fait de retirer une boule rouge de la deuxième urne. Ces événements sont indépendants. Il est alors évident, que

$$\mathbf{P}(A)=\frac{m_1}{n_1}, \qquad \mathbf{P}(B)=\frac{m_2}{n_2}. \tag{2}$$

Il est possible de retirer une boule de chaque urne n_1n_2 fois. Le nombre de cas favorables au tirage de deux urnes de deux boules rouges est m_1m_2. La probabilité de la réalisation simultanée des événements A et B est

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B)=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}.$$

Remplaçant dans cette formule $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_2}{n_2}$ par leurs expressions tirées de (2), nous obtenons l'égalité (1). Une illustration de ce théorème est donnée à la fig. 407.

Dans le cas de n événements indépendants $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on peut démontrer d'une manière analogue l'égalité

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } A_n) = \mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2)\ldots\mathbf{P}(A_n). \quad (3)$$

Exemple 1. Le fonctionnement fiable d'un appareil dépend de la fiabilité de fonctionnement de chacun de ses trois éléments composants. La probabilité du fonctionnement fiable de chacun de ces trois éléments au cours d'un cycle est respectivement égale à $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Trouver la probabilité du fonctionnement fiable de l'appareil au cours du cycle donné.

Solution. D'après le théorème du produit des probabilités (3) nous aurons :

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}378.$$

Remarque. Le théorème 2 du § 3 (formule (4)) sur la probabilité de la somme des événements compatibles s'écrit, compte tenu de la formule (1) :

$$\mathbf{P}(A \text{ ou } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B). \quad (4)$$

Exemple 2. La probabilité de la réalisation d'un événement au cours d'une épreuve est égale à p. Déterminer le nombre n d'épreuves nécessaires pour que la probabilité de la réalisation de l'événement soit plus grande ou égale à Q.

Solution. Nous pouvons écrire d'après les théorèmes sur la somme et le produit des probabilités que

$$Q \geqslant 1 - (1-p)^n.$$

Résolvant cette inégalité par rapport à n, nous obtenons :

$$n \geqslant \frac{\log(1-Q)}{\log(1-p)}.$$

On peut aisément énoncer un problème de ce genre, comportant une telle solution analytique, dans les termes du « schéma à urnes ».

§ 5. Evénements dépendants. Probabilité conditionnelle. Probabilité totale

Définition 1. On dit que l'événement A *dépend de l'événement* B, si la probabilité de la réalisation de l'événement A dépend de ce que l'événement B est ou non réalisé.

Nous désignerons la probabilité de la réalisation de l'événement A, à condition que l'événement B ait lieu, par $\mathbf{P}(A/B)$ que nous l'appellerons *probabilité conditionnelle de l'événement* A sachant que B est réalisé.

Exemple 1. Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On retire une première boule de l'urne (premier prélèvement), puis une seconde (deuxième prélèvement). Appelons B l'événement actualisant l'apparition d'une

boule blanche au premier tirage, et A l'événement actualisant l'apparition d'une boule blanche au second tirage

Il est évident que la probabilité de l'événement A, l'événement B étant réalisé, sera

$$\mathbf{P}(A/B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

La probabilité de l'événement A, l'événement B n'étant pas réalisé (le premier tirage a donné une boule noire), sera

$$\mathbf{P}(A/\overline{B})=\frac{3}{4}.$$

Nous voyons que

$$\mathbf{P}(A/B)\neq\mathbf{P}(A/\overline{B}).$$

Théorème 1. *La probabilité de la réalisation simultanée de deux événements est égale au produit de la probabilité de l'un d'entre*

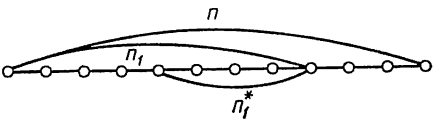


Fig. 408

eux par la probabilité conditionnelle du second, calculée avec condition que le premier événement est réalisé, autrement dit

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B)=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A/B). \tag{1}$$

Démonstration. Nous donnerons la démonstration pour des événements, qui se ramènent au schéma à urnes (c'est-à-dire au cas où l'on peut appliquer la définition classique des probabilités).

Supposons qu'une urne contienne n boules, dont n_1 sont blanches et n_2 noires. Supposons encore, que parmi les n_1 boules blanches n_1^* boules soient marquées d'un astérisque, et que les autres soient simplement blanches (fig. 408).

Retirons une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de l'événement consistant en ce que la boule retirée soit une boule blanche marquée d'un astérisque?

Soit B l'événement actualisant l'apparition d'une boule blanche, A l'événement actualisant une boule blanche marquée d'un astérisque. Il est évident, que

$$\mathbf{P}(B)=\frac{n_1}{n}. \tag{2}$$

La probabilité de l'apparition d'une boule blanche avec un astérisque, sous condition qu'on a retiré une boule blanche, sera

$$\mathbf{P}(A/B)=\frac{n_1^*}{n_1}. \tag{3}$$

La probabilité de l'extraction d'une boule blanche avec un astérisque est $\mathbf{P}(A \text{ et } B)$. Il est évident, que

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B) = \frac{n_1^*}{n}. \tag{4}$$

Or

$$\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}. \tag{5}$$

Portant dans (5) les membres de gauche des expressions (2), (3) et (4) nous obtenons:

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A/B).$$

L'égalité (1) est démontrée.

Si les événements considérés n'entrent pas dans le cadre du schéma classique, la formule (1) sert à définir la notion de probabilité conditionnelle. *La probabilité conditionnelle de l'événement A, si l'événement B est réalisé, est alors définie à l'aide de la formule*

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ et } B)}{\mathbf{P}(B)} \quad (\text{si } \mathbf{P}(B) \neq 0).$$

R e m a r q u e 1. Appliquons cette dernière formule à l'expression $\mathbf{P}(B \text{ et } A)$:

$$\mathbf{P}(B \text{ et } A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B/A). \tag{6}$$

Dans les égalités (1) et (6) les premiers membres sont égaux, puisqu'il s'agit de la même probabilité; par conséquent, les seconds membres sont aussi égaux et on peut écrire l'égalité

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B/A). \tag{7}$$

E x e m p l e 2. Pour le cas de l'exemple 1, donné au début de ce paragraphe, nous avons:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{P}(A/B) = \frac{1}{2}.$$

Nous obtenons d'après la formule (1):

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

La probabilité $\mathbf{P}(A \text{ et } B)$ peut aussi être aisément obtenue par un calcul direct.

E x e m p l e 3. La probabilité de fabrication d'une pièce de qualité satisfaisant aux normes est, pour une machine-outil, égale à 0,9. La probabilité de réalisation d'une pièce de qualité supérieure à la norme parmi les pièces satisfaisantes est égale à 0,8. Calculer la probabilité de réalisation d'une pièce de qualité supérieure à l'aide de la machine-outil donnée.

S o l u t i o n. Appelons B l'événement consistant en la fabrication d'une pièce normale par la machine-outil, et événement A la réalisation d'une pièce de qualité supérieure.

Ici $\mathbf{P}(B) = 0{,}9$, $\mathbf{P}(A/B) = 0{,}8$.

Portant ces valeurs dans la formule (1), nous obtenons la probabilité cherchée

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Théorème 2. *Si l'événement A ne peut être réalisé que si l'un des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formant un système exhaustif d'événements mutuellement incompatibles est réalisé, alors la probabilité de l'événement A est donnée par la formule*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(A/B_1) + \mathbf{P}(B_2)\,\mathbf{P}(A/B_2) + \ldots$$
$$\ldots + \mathbf{P}(B_n) \cdot \mathbf{P}(A/B_n). \qquad (8)$$

La formule (8) est appelée formule des *probabilités totales.*

Démonstration. L'événement A peut avoir lieu si l'un de tous événements compatibles suivants est réalisé

$$(B_1 \text{ et } A), \quad (B_2 \text{ et } A), \quad \ldots, \quad (B_n \text{ et } A).$$

Nous obtenons donc en vertu du théorème d'addition des probabilités

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1 \text{ et } A) + \mathbf{P}(B_2 \text{ et } A) + \ldots + \mathbf{P}(B_n \text{ et } A).$$

Remplaçant les termes du second membre par leur expression tirée de la formule (1) nous obtenons l'égalité (8).

Exemple 4. Trois coups sont tirés à la file sur une cible. La probabilité d'atteinte de la cible est respectivement égale à $p_1 = 0{,}3$ au premier coup, $p_2 = 0{,}6$ au deuxième et $p_3 = 0{,}8$ au troisième. La probabilité de destruction de la cible est $\lambda_1 = 0{,}4$ quand la cible est touchée une fois, $\lambda_2 = 0{,}7$ quand elle est touchée deux fois, et $\lambda_3 = 1{,}0$ quand elle est touchée 3 fois. Déterminer la probabilité de destruction de la cible quand trois coups sont tirés (événement A).

Solution. Considérons le système exhaustif d'événements mutuellement incompatibles :

B_1 — une atteinte ;
B_2 — deux atteintes ;
B_3 — trois atteintes ;
B_4 — pas d'atteintes.

Déterminons la probabilité de chaque événement. La cible sera atteinte une fois si elle est touchée au premier tir, et ne l'est pas au deuxième et troisième tirs ; ou encore, si elle n'est pas touchée au premier tir, est touchée au second et manquée au troisième ; et enfin, si elle a été manquée aux deux premiers tirs et n'est touchée qu'au troisième. Donc, en vertu des théorèmes du produit et de l'addition des probabilités, la probabilité d'une atteinte de la cible sera

$$\mathbf{P}(B_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)\,p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = 0{,}332.$$

Raisonnant de manière analogue, nous obtenons

$$\mathbf{P}(B_2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)\,p_3 + (1-p_1)\,p_2p_3 = 0{,}468,$$
$$\mathbf{P}(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}144,$$
$$\mathbf{P}(B_4) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0{,}056.$$

Ecrivons les probabilités conditionnelles de la destruction de la cible au cas de la réalisation de chacun de ces événements

$$\mathbf{P}(A/B_1)=0{,}4, \quad \mathbf{P}(A/B_2)=0{,}7, \quad \mathbf{P}(A/B_3)=1{,}0, \quad \mathbf{P}(A/B_4)=0.$$

Portant les expressions obtenues dans la formule (8), nous obtenons la probabilité de destruction de la cible

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A/B_1)+\mathbf{P}(B_2)\cdot\mathbf{P}(A/B_2)+\mathbf{P}(B_3)\cdot\mathbf{P}(A/B_3)+$$
$$+\mathbf{P}(B_4)\cdot\mathbf{P}(A/B_4)=0{,}332\cdot0{,}4+0{,}468\cdot0{,}7+0{,}144\cdot1{,}0+0{,}056\cdot0=0{,}6044.$$

Remarque 2. Si l'événement A ne dépend pas de l'événement B, on a

$$\mathbf{P}(A/B)=\mathbf{P}(A),$$

et la formule (1) prend la forme:

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B)=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A),$$

autrement dit, nous obtenons la formule (1) du § 4.

§ 6. Probabilités des causes. Formule de Bayes

Position du problème. De même que pour le théorème 2 du § 5 nous allons considérer le système exhaustif d'événements mutuellement incompatibles $B_1, B_2, \ldots, B_n$ dont les probabilités correspondantes sont $\mathbf{P}(B_1), \mathbf{P}(B_2), \ldots, \mathbf{P}(B_n)$. L'événement A ne peut avoir lieu que conjointement avec l'un des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que nous appellerons des *causes* (ou des hypothèses).

En vertu de la formule (8) du § 5 la probabilité de la réalisation de l'événement A sera

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A/B_1)+\mathbf{P}(B_2)\cdot\mathbf{P}(A/B_2)+\ldots$$
$$\ldots+\mathbf{P}(B_n)\cdot\mathbf{P}(A/B_n). \tag{1}$$

Supposons que l'événement A soit réalisé. L'actualisation de l'événement A entraînera une modification des probabilités des causes $\mathbf{P}(B_1), \ldots, \mathbf{P}(B_n)$. Déterminons les probabilités conditionnelles de la réalisation de ces causes en supposant que l'événement A est actualisé, en d'autres termes déterminons

$$\mathbf{P}(B_1/A), \ \mathbf{P}(B_2/A), \ \ldots, \ \mathbf{P}(B_n/A).$$

Solution du problème. Nous trouvons, d'après la formule (7) du § 5, la probabilité $\mathbf{P}(A \text{ et } B_1)$:

$$\mathbf{P}(A \text{ et } B_1)=\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A/B_1)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B_1/A),$$

d'où nous tirons

$$\mathbf{P}(B_1/A)=\frac{\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A/B_1)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Remplaçant $\mathbf{P}(A)$ par son expression (1), nous obtenons :

$$\mathbf{P}(B_1/A) = \frac{\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A/B_i)}. \tag{2}$$

Nous trouvons d'une manière analogue

$$\mathbf{P}(B_2/A),\ \mathbf{P}(B_3/A),\ \ldots,\ \mathbf{P}(B_n/A).$$

Nous avons ainsi

$$\mathbf{P}(B_k/A) = \frac{\mathbf{P}(B_k)\cdot\mathbf{P}(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A/B_i)}. \tag{3}$$

La formule (2) est appelée *formule de Bayes*, ou *théorème des causes*.

R e m a r q u e. Il découle de la formule (3) que dans l'expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_k/A)$ (probabilité de la réalisation de la cause B_k, après l'actualisation de l'événement A) le dénominateur ne dépend pas de l'indice k.

E x e m p l e 1. Supposons qu'avant l'épreuve quatre causes équiprobables B_1, B_2, B_3, B_4 étaient en présence :

$$\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2) = \mathbf{P}(B_3) = \mathbf{P}(B_4) = 0{,}25.$$

Les probabilités conditionnelles de la réalisation de l'événement A sont respectivement

$$\mathbf{P}(A/B_1) = 0{,}7, \qquad \mathbf{P}(A/B_2) = 0{,}1,$$
$$\mathbf{P}(A/B_3) = 0{,}1, \qquad \mathbf{P}(A/B_4) = 0{,}02.$$

Supposons qu'après l'épreuve l'événement A soit réalisé. Nous obtenons alors d'après les formules (3) :

$$\mathbf{P}(B_1/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}7}{0{,}25\cdot 0{,}7 + 0{,}25\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}02} = \frac{0{,}175}{0{,}23} \approx 0{,}76,$$

$$\mathbf{P}(B_2/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11,$$

$$\mathbf{P}(B_3/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11,$$

$$\mathbf{P}(B_4/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}02}{0{,}23} = 0{,}02.$$

Nous avions ici $\mathbf{P}(B_1) = 0{,}25$, donc $\mathbf{P}(B_1/A) = 0{,}76$ est devenu plus grande, car l'événement A est actualisé. Dans ce cas la probabilité $\mathbf{P}(A/B_1) = 0{,}7$ est la plus grande que les autres probabilités conditionnelles.

E x e m p l e 2. Le montage de 30 % des appareils est effectué par un spécialiste hautement qualifié et celui de 70 % par un spécialiste de qualification moyenne. La fiabilité de fonctionnement de l'appareil est de 0.90 au cas où le montage a été effectué par un spécialiste hautement qualifié, et de 0,80 si le montage a été effectué par un spécialiste de qualification moyenne. Un appa-

reil choisi au hasard s'est avéré d'un fonctionnement fiable. Déterminer la probabilité, pour que son montage ait été effectué par un spécialiste hautement qualifié.

Solution. Appelons événement A un fonctionnement fiable de l'appareil. Avant l'opération de contrôle deux hypothèses étaient possibles:

B_1 — le montage est effectué par un spécialiste hautement qualifié,

B_2 — le montage est effectué par un spécialiste de qualification moyenne.

Ecrivons les probabilités de ces causes:

$$\mathbf{P}(B_1)=0{,}3, \quad \mathbf{P}(B_2)=0{,}7.$$

Les probabilités conditionnelles de l'événement sont

$$\mathbf{P}(A/B_1)=0{,}9, \quad \mathbf{P}(A/B_2)=0{,}8.$$

Déterminons les probabilités des causes B_1 et B_2 sous la condition, que l'événement A est réalisé.

Nous avons d'après la formule (2):

$$\mathbf{P}(B_1/A)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}8}=\frac{0{,}27}{0{,}83}=0{,}325,$$

$$\mathbf{P}(B_2/A)=\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}8}=\frac{0{,}56}{0{,}83}=0{,}675.$$

§ 7. Variable aléatoire discrète. Loi de distribution d'une variable aléatoire discrète

Définition 1. La variable x prenant à la suite d'une épreuve l'une des valeurs d'une suite finie ou infinie $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ est appelée *variable aléatoire discrète* si à chaque valeur x_k correspond une probabilité p_k pour que la variable x prenne la valeur x_k.

Il découle de la définition qu'à chaque valeur x_k est associée une probabilité p_k.

La relation fonctionnelle liant la probabilité p_k à x_k est appelée *loi de distribution des probabilités d'une variable aléatoire discrète* *).

Valeurs possibles de la variable aléatoire	x_1	x_2	...	...	...	x_k	...
Probabilités de ces valeurs	p_1	p_2	...	...	...	p_k	...

La même loi de distribution peut être donnée graphiquement, sous forme d'un *polygone de distribution des probabilités*, quand on cons-

*) On dit parfois simplement: « loi de distribution ».

truit dans un système rectangulaire de coordonnées les points de coordonnées (x_k, p_k) que l'on réunit par une ligne brisée (fig. 409).

La loi de distribution peut également être donnée sous forme analytique :

$$p_k = f(x_k).$$

Le fait que la variable aléatoire x prendra nécessairement l'une des valeurs de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, est un événement certain, de sorte que la condition

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \tag{1}$$

dans le cas d'une suite finie de N valeurs ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \tag{1'}$$

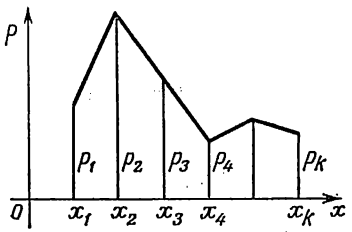


Fig. 409

dans le cas d'une suite infinie de valeurs, doit être remplie. Notons que la valeur de la variable aléatoire à laquelle correspond la plus grande probabilité est appelée le *mode*. Pour la variable aléatoire représentée sur la fig. 409 le mode est x_2.

Exemple 1. La variable aléatoire x est le nombre de points, figurant sur la face supérieure d'un dé que l'on jette une fois. La variable x peut prendre l'une des valeurs suivantes : 1, 2, 3, 4, 5, 6. La probabilité de chacune de ces valeurs est $\frac{1}{6}$. Le tableau de distribution de cette variable aléatoire sera, par conséquent, de la forme

x	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple 2. Soit p la probabilité de réalisation de l'événement A au cours de chaque épreuve isolée d'une suite infinie d'épreuves. La variable aléatoire x est le numéro d'ordre de l'expérience au cours de laquelle l'événement A s'est réalisé pour la première fois. Trouver la loi de distribution de la variable aléatoire x.

Solution. La variable aléatoire x peut prendre n'importe quelle valeur entière 1, 2, 3, . . . La probabilité p_1 pour que l'événement A soit réalisé au cours de la première épreuve sera

$$p_1 = \mathbf{P}(A) = p.$$

Il est évident que la variable aléatoire x prendra au cours de n épreuves l'une des valeurs suivantes

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}.$$

Théorème 1. *La probabilité* $\mathbf{P}\left(x = \frac{m}{n}\right)$ *pour que la variable aléatoire x prenne la valeur* $\frac{m}{n}$, *autrement dit, pour que, au cours de n épreuves, l'événement A se réalise m fois, et l'événement contraire $\bar{A}$ (A n'a pas lieu) $n - m$ fois, est égale à $C_n^m p^m q^{n-m}$, où C_n^m est le nombre de combinaisons de n éléments pris m à m; p est la probabilité de l'événement A, $p = \mathbf{P}(A)$; q est la probabilité de la non-réalisation de l'événement A, autrement dit $q = 1 - p = \mathbf{P}(\bar{A})$.*

Démonstration. L'événement A se produira m fois au cours de n épreuves si, par exemple, les événements $\bar{A}$ et A se succèdent comme suit:

$$\underbrace{AA \ldots A}_{m}\ \underbrace{\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}}_{n-m},$$

autrement dit, au cours de m premières épreuves l'événement A apparaît et au cours de $n - m$ dernières épreuves l'événement A n'apparaît pas (c'est l'événement $\bar{A}$ qui est réalisé). Etant donné que

$$\mathbf{P}(A) = p, \quad \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - p = q,$$

en vertu du théorème du produit, la probabilité d'une telle succession d'événements sera

$$p^m \cdot q^{n-m}.$$

L'événement A peut également se produire m fois au cours de n épreuves avec une autre séquence des événements $\bar{A}$ et A, par exemple, avec la séquence suivante $\underbrace{AA \ldots A}_{m-1}\ \underbrace{\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}}_{n-m}\ \underbrace{A}_{1}$.

Toutefois l'événement A doit nécessairement se produire m fois et l'événement $\bar{A}$ $n - m$ fois. La probabilité d'une telle succession des événements A et $\bar{A}$ sera

$$p^{m-1} \cdot q^{n-m} \cdot p = p^m \cdot q^{n-m}.$$

Combien de successions différentes d'événements A et $\bar{A}$ sont-elles possibles pour n épreuves si l'événement A est réalisé m fois?

La probabilité p_2 pour que l'événement A ne se réalisant pas au cours de la première épreuve se réaliserait au cours de la seconde sera

$$p_2 = \mathbf{P}(\overline{A} \text{ et } A) = (1-p)\,p.$$

La probabilité p_3 pour que l'événement A ne s'actualisant pas ni au cours de la première, ni au cours de la seconde des épreuves se réaliserait au cours de la troisième sera

$$p_3 = \mathbf{P}(\overline{A} \text{ et } \overline{A} \text{ et } A) = (1-p)(1-p)\,p = (1-p)^2\,p,$$

et ainsi de suite

$$p_k = (1-p)^{k-1}\,p. \tag{2}$$

Le tableau de la distribution des probabilités sera:

x	1	2	3	...	...	k	...
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	...	...	$(1-p)^{k-1}p$	...

Nous avons également ici

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Le problème que nous venons de considérer s'applique, en particulier, au problème du tir jusqu'au premier coup au but.

Supposons que l'on effectue un tir jusqu'à ce que l'on ait touché la cible. Soit p la probabilité d'atteinte de la cible au cours de chaque tir.

La variable aléatoire x est le numéro d'ordre du tir au cours duquel la cible est atteinte pour la première fois. Le tableau de la distribution des probabilités de cette variable aléatoire sera le même que pour l'exemple cité ci-dessus.

§ 8. Fréquence relative et probabilité de la fréquence relative au cours des épreuves répétées

Imaginons qu'on effectue une série de n épreuves. Au cours de chaque épreuve un événement A peut se produire avec la probabilité p. Soit x la variable aléatoire désignant la fréquence relative de la réalisation de l'événement A au cours d'une série de n épreuves. On demande de déterminer la loi de distribution de la variable aléatoire x pour une série de n épreuves.

Il est évident que leur nombre correspond au nombre de combinaisons de n éléments pris m à m:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Nous obtenons ainsi d'après le théorème d'addition

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{m}{n}\right) = \underbrace{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m}$$

ou encore

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{m}{n}\right) = C_n^m \cdot p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Le théorème est démontré.

La démonstration du théorème nous a permis de définir la loi de distribution d'une variable aléatoire x, que nous disposons sous forme de tableau

x	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	...	$\frac{m}{n}$	...	...	$\frac{n}{n}$
$\mathbf{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)$	$1\cdot q^n$	$C_n^1 p\cdot q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	...	$1\cdot p^n$

La loi de distribution ainsi obtenue est appelée *loi binomiale*, car les probabilités $\mathbf{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)$ sont égales aux termes correspondants du développement de l'expression $(q+p)^n$ par la formule du binôme:

$$(q+p)^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2}$$

La somme des probabilités de toutes les valeurs possibles est encore, comme il fallait s'y attendre, égale à 1, puisque $(p+q)^n = 1^n = 1$.

R e m a r q u e. Lors de l'étude de nombreuses questions on a souvent besoin de déterminer la probabilité pour que l'événement A soit réalisé au moins une fois, autrement dit la fréquence relative de l'événement $x \geqslant \frac{1}{n}$. Il est évident, que la probabilité $\mathbf{P}\left(x \geqslant \frac{1}{n}\right)$ est déterminée à partir de l'égalité

$$\mathbf{P}\left(x \geqslant \frac{1}{n}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(x=\frac{0}{n}\right) = 1 - q^n. \tag{3}$$

Il découle également du tableau de la distribution que la probabilité $\mathbf{P}\left(x \geqslant \frac{k}{n}\right)$, pour que l'événement ait lieu au moins k fois, sera déterminée par la formule

$$\mathbf{P}\left(x \geqslant \frac{k}{n}\right) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4}$$

ou encore

$$\mathbf{P}\left(x \geqslant \frac{k}{n}\right) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Exemple 1. Représenter graphiquement la loi binomiale de la distribution d'une variable aléatoire x pour $n = 8$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

Solution. Déterminons toutes les valeurs des probabilités entrant dans le tableau

$$\mathbf{P}(x=0) = C_8^0 \cdot q^8 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{1}{8}\right) = C_8^1 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{32},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{2}{8}\right) = C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{64},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{3}{8}\right) = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{4}{8}\right) = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{35}{128},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{5}{8}\right) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{6}{8}\right) = C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{64},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{7}{8}\right) = C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{32},$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{8}{8}\right) = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}.$$

Construisons le polygone de la distribution (fig. 410).

Exemple 2. Quelle est la probabilité pour que l'événement A se produise deux fois: a) au cours de deux épreuves; b) au cours de trois épreuves; c) au cours de 10 épreuves, si la probabilité de la réalisation de l'événement au cours de chaque épreuve est 0,4 ?

Solution. a) Ici $n = 2$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$:

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{2}{2}\right) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} (0{,}4)^2 = 0{,}16;$$

b) ici $n=3$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$:

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{2}{3}\right)=C_3^2p^2q^1=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(0{,}4)^2\cdot 0{,}6=0{,}288\,;$$

c) ici $n=10$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$:

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{2}{10}\right)=C_{10}^2\cdot p^2\cdot q^8=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}(0{,}4)^2\cdot(0{,}6)^8=0{,}121.$$

Exemple 3. On effectue quatre épreuves indépendantes. La probabilité de la réalisation de l'événement A est 0,5 pour chaque épreuve. Déterminer la probabilité pour que l'événement A se réalise au moins deux fois.

Solution. Ici $n=4$, $p=0{,}5$, $q=0{,}5$:

$$\mathbf{P}\left(x\geqslant\frac{2}{4}\right)=\mathbf{P}\left(x=\frac{2}{4}\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(x=\frac{3}{4}\right)+\mathbf{P}\left(x=\frac{4}{4}\right)$$

ou

$$\mathbf{P}\left(x\geqslant\frac{2}{4}\right)=1-$$
$$-\left[\mathbf{P}\left(x=\frac{0}{4}\right)+\mathbf{P}\left(x=\frac{1}{4}\right)\right].$$

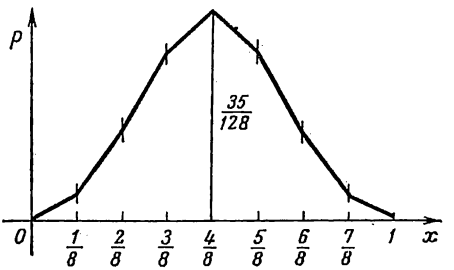


Fig. 410

Calculons la probabilité

$$\mathbf{P}\left(x<\frac{2}{4}\right)=\mathbf{P}\left(x=\frac{0}{4}\right)+\mathbf{P}\left(x=\frac{1}{4}\right)=q^4+4q^3\cdot p^1=$$
$$=(0{,}5)^4+4\cdot(0{,}5)^4=0{,}3125.$$

Nous obtenons, par conséquent, de la seconde formule :

$$\mathbf{P}\left(x\geqslant\frac{2}{4}\right)=1-[(0{,}5)^4+4\cdot(0{,}5)^4]=0{,}6875\approx 0{,}69.$$

Exemple 4. La probabilité de rebut dans un lot de pièces est $p=0{,}1$. Quelle est la probabilité pour que dans un lot de trois pièces, il y aura $m=0, 1, 2, 3$ pièces défectueuses ?

Solution.

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{0}{3}\right)=C_3^0q^3=1\cdot 0{,}9^3=0{,}729,$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{1}{3}\right)=C_3^1pq^2=\frac{3}{1}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}243,$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{2}{3}\right)=C_3^2p^2q=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}027,$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{3}{3}\right)=C_3^3p^3=1\cdot 0{,}1^3=0{,}001.$$

§ 9. Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Soit x une variable aléatoire discrète dont la loi de distribution est la suivante:

x	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
$\mathbf{P}\ (x=x_k)$	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Définition 1. On appelle *espérance mathématique* de la variable aléatoire discrète x (nous la désignerons par $\mathbf{M}\,[x]$ ou m_x) la somme des produits de toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire par les probabilités respectives de ces valeurs:

$$\mathbf{M}\,[x] = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n,$$

ou plus simplement

$$\mathbf{M}\,[x] = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k. \tag{1}$$

Dans ce cas nous avons, comme nous l'avons mentionné plus haut, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Si les valeurs de la variable aléatoire forment une suite infinie de valeurs, alors

$$m_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k. \tag{1'}$$

Nous ne considérerons que les variables aléatoires pour lesquelles cette série converge.

Etablissons maintenant la relation entre l'espérance mathématique d'une variable aléatoire et la moyenne arithmétique des valeurs de la variable aléatoire pour un grand nombre d'épreuves; plus exactement montrons que *pour un grand nombre d'épreuves la moyenne arithmétique des valeurs observées est proche de l'espérance mathématique*, ou en nous référant au § 1 nous pouvons dire, que *la moyenne arithmétique des valeurs observées d'une variable aléatoire tend, quand le nombre des épreuves croît indéfiniment, vers son espérance mathématique.*

Imaginons que l'on effectue N épreuves indépendantes. Supposons que

la valeur x_1 s'est manifestée n_1 fois,
la valeur x_2 s'est manifestée n_2 fois,
. . . . . .
la valeur x_ν s'est manifestée n_ν fois.

La variable aléatoire x prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Calculons la moyenne arithmétique des valeurs obtenues de la variable x (nous la désignerons par $\overline{\mathbf{M}}[x]$ ou $\overline{m}_x$) :

$$\overline{m}_x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_\nu n_\nu}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \ldots + x_\nu \frac{n_\nu}{N}. \qquad (2)$$

Comme pour un grand nombre N d'épreuves la fréquence relative $\frac{n_k}{N}$ tend vers la probabilité de la réalisation de la valeur x_k, on a

$$\sum_{k=1}^{\nu} x_k \cdot \frac{n_k}{N} \approx \sum_{k=1}^{\nu} x_k p_k.$$

On obtient alors sous des hypothèses naturelles

$$\overline{\mathbf{M}}[x] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{M}[x]. \qquad (3)$$

R e m a r q u e 1. Si nous avions considéré le schéma à urnes comportant N boules, dont n_1 boules marquées du signe x_1, et n_2 boules du signe x_2, etc., le « nombre espéré », quand on prélève une boule, sera donné par la formule (2), autrement dit est égal à $\overline{m}_x$.

E x e m p l e 1. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire x exprimant le nombre de réalisations de l'événement A pouvant se produire ou ne pas se produire au cas de trois épreuves si la probabilité de réaliser l'événement est $p = 0{,}4$ pour chaque épreuve.

S o l u t i o n. La variable aléatoire x peut prendre les valeurs

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$$

Disposons en tableau la distribution de la variable aléatoire donnée. Nous trouvons la probabilité de ces valeurs d'après le théorème des épreuves répétées ($n = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$) :

$$\mathbf{P}(x=0) = C_3^0 (0{,}6)^3 = 0{,}216,$$
$$\mathbf{P}(x=1) = C_3^1 (0{,}4)(0{,}6)^2 = 0{,}432,$$
$$\mathbf{P}(x=2) = C_3^2 (0{,}4)^2 (0{,}6) = 0{,}288,$$
$$\mathbf{P}(x=3) = C_3^3 (0{,}4)^3 = 0{,}064.$$

Le tableau de la distribution de la variable aléatoire sera

x	0	1	2	3
$\mathbf{P}(x=x_k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Nous calculons l'espérance mathématique d'après la formule (1) : $m_x = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2$ réalisation.

Exemple 2. On effectue une épreuve au cours de laquelle l'événement A peut avoir lieu ou ne pas avoir lieu. La probabilité pour que l'événement se produise est égale à p. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire x exprimant le nombre de réalisations de l'événement.

Formons le tableau de la distribution de la variable aléatoire

x	0	1
p_k	$1-p$	p

Par conséquent, $m_x = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$.

Remarque 2. Nous établirons par la suite que l'espérance mathématique $\mathbf{M}[x]$ du nombre de réalisation de l'événement A au cours de n épreuves indépendantes est égale au produit du nombre d'épreuves par la probabilité p de la réalisation de l'événement A à chaque épreuve :

$$\mathbf{M}[x] = np. \tag{4}$$

La solution du problème de l'exemple 1 sera ainsi :

$$\mathbf{M}[x] = np = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2 \text{ réalisation.}$$

Si dans la formule (4) on connaît $\mathbf{M}[x]$ et p, on trouvera n qui est le nombre d'épreuves donnant l'espérance mathématique requise du nombre de réalisation de l'événement

$$n = \frac{\mathbf{M}[x]}{p}.$$

Exemple 3. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire x dont le tableau de la distribution est le suivant (cf. exemple 2 du § 7) :

x	1	2	3	...	k	...
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	...	$(1-p)^{k-1}p$	...

Solution. Nous avons en vertu de la formule (1) (en notant $1-p=q$) :

$$m_x = 1 \cdot p + 2qp + 3q^2p + \ldots + kq^{k-1}p + \ldots =$$
$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots) = p(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^k + \ldots)' =$$
$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Ainsi

$$m_x = \frac{1}{p}.$$

Notons que

$$m_x \to 1 \quad \text{lorsque } p \to 1,$$
$$m_x \to \infty \quad \text{lorsque } p \to 0.$$

On peut expliciter ces relations en se basant sur le sens du problème.

En effet, si la probabilité de la réalisation de l'événement A est pour chaque épreuve proche de 1 ($p \approx 1$), on peut s'attendre à ce que l'événement A aura lieu au cours d'une seule épreuve (la première) ($m_x \approx 1$). Par contre, si la probabilité p est petite ($p \approx 0$), on peut s'attendre à ce que pour que l'événement A soit réalisé, on soit obligé d'effectuer un très grand nombre d'épreuves ($m_x \approx \infty$).

On appelle *centre de la distribution des probabilités de la variable aléatoire* x l'espérance mathématique de la variable aléatoire x.

Remarque 3. Le terme « centre de la distribution des probabilités » est introduit par analogie avec celui de « centre de gravité ». Si sur l'axe Ox on attribue aux points d'abscisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les masses $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on sait de la géométrie analytique que le centre de gravité de ces masses sera déterminé par la formule

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

Si $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors

$$x_C = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{5}$$

La formule (5) par sa forme coïncide avec la formule (1) de l'espérance mathématique.

Nous avons ainsi établi que le centre de gravité et l'espérance mathématique se calculent à l'aide de formules analogues. C'est précisément la raison pour laquelle on a introduit le terme de « centre de distribution des probabilités ».

Soit donnée une variable aléatoire x avec sa loi de distribution (fig. 411) ; supposons que son espérance mathématique est égale à m_x. Considérons la différence entre la variable aléatoire x et son espérance mathématique $x - m_x$.

Nous appellerons cette variable aléatoire *variable aléatoire centrée* ou *écart* et nous la désignerons par x^0.

Il est évident que la loi de distribution de cette variable aléatoire x^0 sera (cf. fig. 412)

x^0	$x_1^0 = x_1 - m_x$	$x_2^0 = x_2 - m_x$	...	$x_h^0 = x_h - m_x$
p_h	p_1	p_2	...	p_h

Trouvons l'espérance mathématique de la variable aléatoire centrée

$$\mathbf{M}[x - m_x] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)\, p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k - \sum_{k=1}^{n} m_x p_k =$$

$$= m_x - m_x \sum_{k=1}^{n} p_k = m_x - m_x \cdot 1 = 0.$$

Ainsi, l'*espérance mathématique d'une variable aléatoire centrée est nulle.*

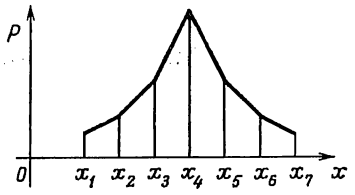


Fig. 411

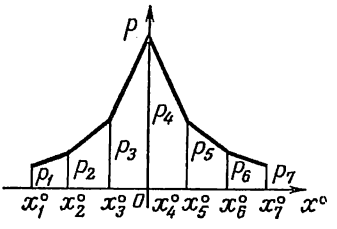


Fig. 412

Remarque 4. Il est parfois rationnel de considérer une variable non aléatoire (certaine) constante comme une variable aléatoire, qui prend avec la probabilité 1 la valeur c, et avec la probabilité 0 les autres valeurs.

Dans ce sens on peut alors parler de l'espérance mathématique d'une constante

$$\mathbf{M}[c] = c \cdot 1 = c, \tag{6}$$

autrement dit *l'espérance mathématique d'une quantité constante est égale à cette constante.*

§ 10. Variance. Ecart quadratique moyen. Notion de moments

Une autre caractéristique quantitative de la variable aléatoire x, différente de l'espérance mathématique qui détermine la position du centre de la distribution des probabilités, est la *variance* ou *fluctuation* de la variable aléatoire x.

Nous désignerons la variance par $\mathbf{D}[x]$ ou σ_x^2.

La variance est la caractéristique numérique de la dispersion, de la déviation des valeurs de la variable aléatoire par rapport à son espérance mathématique.

D é f i n i t i o n 1. On appelle *variance* de la variable aléatoire x l'espérance mathématique du carré de la différence de la variable aléatoire x et de son espérance mathématique (autrement dit l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée correspondante) :

$$\mathbf{D}[x] = \mathbf{M}[(x - m_x)^2] \tag{1}$$

ou

$$\mathbf{D}[x] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 \cdot p_k. \tag{2}$$

La variance possède l'unité du carré de la variable aléatoire. Il est parfois plus commode, pour caractériser la dispersion des valeurs, d'utiliser une grandeur dont l'unité coïncide avec celle de la variable aléatoire, que l'on appelle *écart quadratique moyen.*

D é f i n i t i o n 2. On appelle *écart quadratique moyen* de la variable aléatoire la racine carrée de la variance :

$$\sigma[x] = \sqrt{\mathbf{D}[x]}$$

ou sous une forme plus explicite

$$\sigma[x] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 \cdot p_k}. \tag{3}$$

L'écart quadratique moyen est parfois noté σ_x.

R e m a r q u e 1. Lors du calcul de la variance il peut s'avérer commode de transformer la formule (1) comme suit :

$$\mathbf{D}(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2 \sum_{k=1}^{n} x_k m_x p_k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} m_x^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2m_x \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + m_x^2 \sum_{k=1}^{n} p_k =$$
$$= \mathbf{M}[x^2] - 2m_x m_x + m_x^2 \cdot 1 = \mathbf{M}[x^2] - m_x^2.$$

Ainsi

$$\mathbf{D}[x] = \mathbf{M}[x^2] - m_x^2, \tag{4}$$

autrement dit la variance est égale à la différence de l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire et du carré de l'espérance mathématique de la variable aléatoire.

E x e m p l e 1. On effectue une expérience au cours de laquelle l'événement A peut se produire ou ne pas se produire. La probabilité de la réalisation

de l'événement A est égale à p. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart quadratique moyen.

S o l u t i o n . Disposons en tableau les valeurs du nombre de réalisations de l'événement $(q = 1 - p)$:

x	1	0
p_k	p	q

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{M}[x] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \\ &\mathbf{D}[x] = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq, \\ &\sigma[x] = \sqrt{pq}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Pour élucider le sens des notions de variance et d'écart quadratique moyen en tant que caractéristiques de la dispersion de la variable aléatoire, considérons quelques exemples.

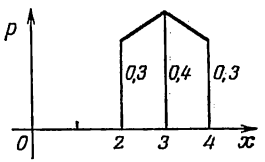


Fig. 413

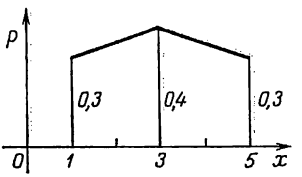


Fig. 414

E x e m p l e 2. La variable aléatoire x est donnée par la loi de distribution suivante (cf. la fig. 413) :

x	2	3	4
p_k	0,3	0,4	0,3

Déterminer : 1) l'espérance mathématique, 2) la variance, 3) l'écart quadratique moyen.

S o l u t i o n.

1. $\mathbf{M}[x] = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 3$,
2. $\mathbf{D}[x] = (2-3)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3)^2 \cdot 0{,}4 + (4-3)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$,
3. $\sigma[x] = \sqrt{\mathbf{D}[x]} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}77$.

E x e m p l e 3. La variable aléatoire x est donnée par la loi de distribution suivante (cf. la fig. 414) :

x	1	3	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Déterminer: 1) l'espérance mathématique, 2) la variance, 3) l'écart quadratique moyen.

Solution.

1. $\mathbf{M}[x] = 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 = 3$,
2. $\mathbf{D}[x] = (1-3)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3)^2 \cdot 0{,}4 + (5-3)^2 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$,
3. $\sigma[x] = \sqrt{2{,}4} = 1{,}55$.

La dispersion, la déviation de la variable aléatoire est dans le premier exemple inférieure à la dispersion de la variable aléatoire dans le second exemple (cf. fig. 414 et 415). Les variances de ces grandeurs sont respectivement égales à 0,6 et 2,4.

Exemple 4. La variable aléatoire x est donnée par la loi de distribution suivante (cf. la fig. 415):

x	3
p	1

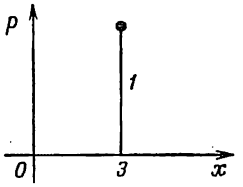


Fig. 415

Déterminer: 1) l'espérance mathématique, 2) la variance, 3) l'écart quadratique moyen.

Solution.

1. $\mathbf{M}[x] = 3 \cdot 1 = 3$,
2. $\mathbf{D}[x] = (3-3)^2 \cdot 1 = 0$,
3. $\sigma[x] = 0$.

La dispersion de cette variable aléatoire est nulle.

Remarque 2. Si l'on considère une quantité constante comme une variable aléatoire, qui prend la valeur c avec la probabilité 1, on démontre aisément que $\mathbf{D}(c) = 0$.

Démonstration. Nous avons déjà montré que $\mathbf{M}[c] = c$ (cf. (5), § 9). Nous obtenons d'après la formule (1):

$$\mathbf{D}[c] = \mathbf{M}[(c-c)^2] = \mathbf{M}[0] = 0, \text{ c.q.f.d.}$$

Remarque 3. Par analogie avec la terminologie en usage en mécanique on appelle *moments centrés du premier et du deuxième ordre* de la variable aléatoire x l'espérance mathématique des quantités $(x - m_x)$, $(x - m_x)^2$. On considère également le moment centré du troisième ordre

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^3 \cdot p_k.$$

Si la variable aléatoire est distribuée symétriquement par rapport au centre de la distribution des probabilités (fig. 411), il est évident que son moment centré du troisième ordre sera nul. Si le moment centré du troisième ordre n'est pas nul, la variable aléatoire ne possède pas une distribution symétrique.

§ 11. Fonctions de variables aléatoires

Supposons que la loi de distribution de la variable aléatoire x soit donnée sous la forme du tableau suivant :

x	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
p_k	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Considérons une fonction de la variable aléatoire x

$$y = f(x).$$

Les valeurs de la fonction $y_k = f(x_k)$ seront les valeurs de la variable aléatoire y.

Si toutes les valeurs $y_k = f(x_k)$ de la variable sont différentes, la loi de distribution de la variable aléatoire y sera donnée par le tableau

$y=f(x)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	...	$y_k=f(x_k)$	...	$y_n=f(x_n)$
p_k	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Si parmi les valeurs $y_k = f(x_k)$ certaines sont égales entre elles, les colonnes correspondantes devront être réunies en une seule en sommant les probabilités correspondantes.

L'espérance mathématique de la fonction $y = f(x)$ de la variable aléatoire x sera déterminée d'après une formule analogue à la formule (1) du § 10 :

$$\mathbf{M}[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot p_k. \tag{1}$$

On définit de même la variance de la fonction

$$\mathbf{D}[f(x)] = \mathbf{M}[(f(x) - \mathbf{M}[f(x)])^2] = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - m_{f(x)})^2 p_k.$$

E x e m p l e . La loi de distribution φ d'une variable aléatoire est donnée par le tableau suivant

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p_k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

On considère la fonction

$$y = A \sin \varphi$$

de cette variable aléatoire.

Disposons en tableau la distribution de la variable aléatoire y:

y	$-A$	$-\frac{A\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{A\sqrt{2}}{2}$	A
p_k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Trouvons l'espérance mathématique de la fonction

$$\mathbf{M}[A \sin \varphi] = -A \cdot 0{,}1 - \frac{A\sqrt{2}}{2} 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}3 + A \cdot 0{,}3 =$$

$$= A\left(0{,}2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}2\right) = A\,(0{,}2 + 0{,}14) = 0{,}34\,A.$$

Des problèmes de ce genre se posent lors de l'étude des processus vibratoires.

§ 12. Variable aléatoire continue. Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue. Probabilité pour qu'une variable aléatoire appartienne à un intervalle donné

Pour bien comprendre la question considérons un exemple.

E x e m p l e. On mesure l'usure d'un cylindre après une certaine période d'exploitation. Cette grandeur est déterminée par la valeur de l'accroissement du diamètre du cylindre. Désignons-la par $\bar{x}$. Il découle de la nature même du problème que la quantité $\bar{x}$ peut prendre n'importe quelle valeur dans un certain intervalle (a, b) des valeurs possibles.

Une quantité de ce genre est appelée *variable aléatoire continue*.

Considérons donc une variable aléatoire continue $\bar{x}$ donnée dans un intervalle (a, b), qui peut être l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$. Partageons cet intervalle par des points arbitraires $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ en petits intervalles de longueur $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$.

Supposons que nous connaissons la probabilité de l'appartenance de la variable aléatoire $\bar{x}$ à l'intervalle (x_{i-1}, x_i). Nous désignerons cette probabilité de la façon suivante: $\mathbf{P}(x_{i-1} < \bar{x} < x_i)$ et nous

la représenterons sous la forme de l'aire du rectangle de base Δx_i (fig. 416).

Pour chaque intervalle (x_{i-1}, x_i) on détermine la probabilité pour la variable aléatoire $\bar{x}$ d'appartenir à cet intervalle, et, par conséquent, on peut construire le rectangle correspondant. Nous obtenons ainsi une ligne en escalier.

D é f i n i t i o n 1. S'il existe une fonction $y = f(x)$, telle que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}(x < \bar{x} < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x), \tag{1}$$

cette fonction $f(x)$ est appelée *densité de distribution des probabilités de la variable aléatoire* $\bar{x}$, ou « loi de distribution » (ou encore « densité de probabilité »).

Nous désignerons par $\bar{x}$ la variable aléatoire continue, par x ou x_k la valeur de cette variable aléatoire. Parfois lorsqu'il n'y a pas de

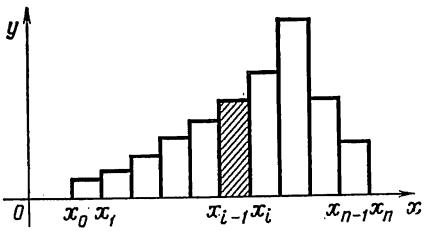


Fig. 416

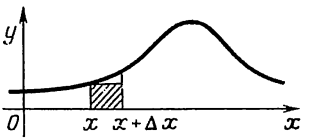


Fig. 417

risque de confusion nous omettrons le trait horizontal sur la lettre x. La courbe $y = f(x)$ est appelée *courbe de distribution des probabilités*, ou *courbe de densité* (fig. 417). Utilisant la notion de limite, on obtient de l'égalité (1) l'égalité approchée

$$\mathbf{P}(x < \bar{x} < x + \Delta x) \cong f(x)\,\Delta x, \tag{2}$$

aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à Δx près Démontrons maintenant le théorème suivant.

T h é o r è m e 1. *Soit $f(x)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire $\bar{x}$. Alors la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire $\bar{x}$ tombe dans un certain intervalle (α, β) est égale à l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre les limites α et β, autrement dit on a l'égalité :*

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \tag{3}$$

Démonstration. Partageons l'intervalle (α, β) à l'aide des points $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} = \beta$ en n petits intervalles (fig. 418). Appliquons à chacun de ces intervalles la formule (2)

$$\mathbf{P}(x_1 < \bar{x} < x_2) \cong f(x_1) \cdot \Delta x_1,$$
$$\mathbf{P}(x_2 < \bar{x} < x_3) \cong f(x_2) \cdot \Delta x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{P}(x_n < \bar{x} < x_{n+1}) \cong f(x_n) \cdot \Delta x_n.$$

Faisons la somme des premiers membres et la somme des seconds membres. Il est évident que nous obtenons à gauche $\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta)$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i.$$

Nous avons obtenu une égalité approchée. Passant à la limite dans

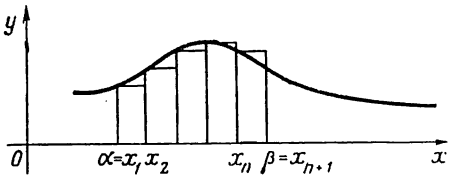


Fig. 418

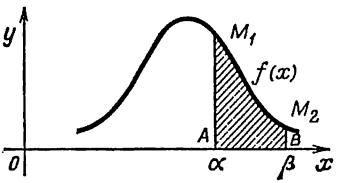


Fig. 419

le second membre lorsque $\max \Delta x_i \to 0$ nous obtenons, en vertu des propriétés des sommes intégrales, l'égalité exacte

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i.$$

(Nous supposons que la fonction $f(x)$ est telle que la limite à droite existe.) Or, la limite du second membre n'est autre que l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre les limites α et β. Nous avons ainsi

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx.$$

Le théorème est démontré.

Nous pouvons donc, connaissant la densité de probabilité d'une variable aléatoire, déterminer la probabilité pour que cette variable aléatoire prenne sa valeur dans l'intervalle considéré. Géométriquement parlant cette probabilité est égale à l'aire du trapèze curviligne correspondant (fig. 419).

Remarque. Dans le cas d'une variable aléatoire continue la probabilité de l'actualisation de l'événement, consistant en ce que $\bar{x} = x_0$, sera nulle.

En effet, posant dans l'égalité (2) $x = x_0$, nous obtenons:

$$\mathbf{P}(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) \cdot \Delta x,$$

d'où

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) = 0,$$

ou encore

$$\mathbf{P}(\bar{x} = x_0) = 0.$$

(Cf. également la remarque 1 à la page 482.) C'est pourquoi dans l'égalité (3), comme dans les égalités précédentes nous pouvons écrire non seulement $\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta)$, mais aussi $\mathbf{P}(\alpha \leqslant \bar{x} \leqslant \beta)$, étant donné que

$$\mathbf{P}(\alpha \leqslant \bar{x} \leqslant \beta) = \mathbf{P}(\bar{x} = \alpha) + \mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) + \mathbf{P}(\bar{x} = \beta) = \\ = \mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta).$$

Si toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire $\bar{x}$ se trouvent dans l'intervalle (a, b), alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \tag{4}$$

car on sait avec certitude que la valeur de la variable aléatoire appartiendra à l'intervalle (a, b).

Si l'intervalle des valeurs possibles est $(-\infty, +\infty)$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{5}$$

Notons que s'il découle de la nature du problème considéré que la fonction $f(x)$ est déterminée sur l'intervalle fini (a, b), on peut estimer qu'elle est déterminée sur tout l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$, mais que

$$f(x) = 0$$

à l'extérieur de l'intervalle (a, b). Dans ce cas on a aussi l'égalité (4) et l'égalité (5). La densité de probabilité de la variable aléatoire définit entièrement la variable aléatoire.

§ 13. Fonction de répartition ou loi intégrale de distribution. Loi de distribution uniforme

Définition 1. Soit $f(x)$ la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire $\bar{x}$ $(-\infty < x < +\infty)$, alors la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{1}$$

est appelée *fonction de répartition* ou *loi intégrale de distribution des probabilités*.

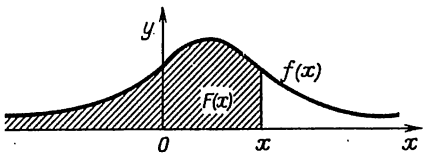


Fig. 420

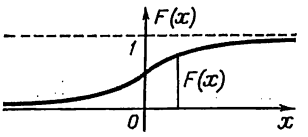


Fig. 421

Pour une variable aléatoire discrète la fonction de répartition est égale à la somme des probabilités de toutes ses valeurs x_k inférieures à x:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Il découle de l'égalité (3) du § 12 que la fonction de répartition est la probabilité pour que la variable aléatoire $\bar{x}$ prenne une valeur inférieure à x (fig. 421):

$$F(x) = \mathbf{P}(-\infty < \bar{x} < x). \tag{2}$$

On voit sur la fig. 420 que pour une valeur donnée x la valeur de la fonction de répartition est numériquement égale à l'aire limitée par la courbe de densité, située à gauche de l'ordonnée menée par le point x.

Le graphique de la fonction $F(x)$ est appelé *courbe intégrale de distribution* (fig. 421).

Passant à la limite dans l'égalité (1) lorsque $x \to +\infty$ nous obtenons en tenant compte de la formule (5) du § 12:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Donnons maintenant la démonstration du théorème suivant

Théorème 1. *La probabilité pour que la variable aléatoire $\bar{x}$ prenne une valeur appartenant à l'intervalle* (α, β) *est égale à l'accroissement de la fonction de répartition sur cet intervalle*

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\alpha).$$

Démonstration. Exprimons la probabilité pour que la variable aléatoire $\bar{x}$ tombe dans l'intervalle (α, β). Ecrivons pour cela la formule (3) du § 12 sous la forme

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$$

(cf. fig. 422). Nous pouvons encore écrire en utilisant l'égalité (1)

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\alpha),$$

c.q.f.d. (cf. fig. 423).

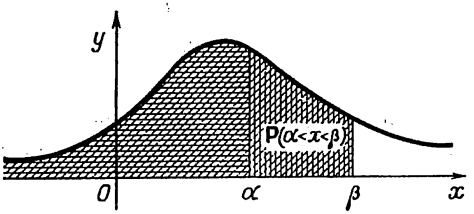


Fig. 422

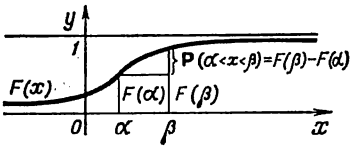


Fig. 423

Notons que la densité de probabilité $f(x)$ et la fonction de répartition correspondante $F(x)$ sont liées par la relation

$$F'(x) = f(x). \tag{3}$$

Cela découle de l'égalité (1) et du théorème sur la dérivation d'une intégrale définie par rapport à sa limite supérieure.

Considérons maintenant une variable aléatoire correspondant à *la loi de distribution uniforme*. La loi de distribution ou la densité de probabilité $f(x)$ d'une telle variable aléatoire est donnée de la façon suivante

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < a,$$
$$f(x) = c \quad \text{pour} \quad a < x < b,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x > b.$$

La densité $f(x)$ admet sur l'intervalle (a, b) une valeur constante c (fig. 424) ; elle est nulle en dehors de cet intervalle. Une distribution de ce genre est dite *loi de distribution uniforme*.

Nous trouvons la valeur de c de la condition $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} c\,dx = c(b-a) = 1,$$

par conséquent,

$$c = \frac{1}{b-a}, \quad b-a = \frac{1}{c}.$$

Il découle de la dernière égalité que l'intervalle (a, b) sur lequel est définie la distribution uniforme est nécessairement fini. Déter-

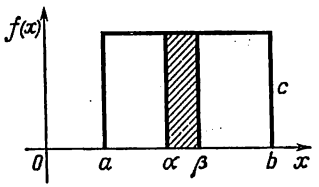


Fig. 424

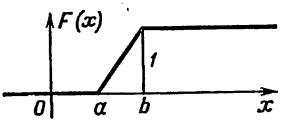


Fig. 425

minons la probabilité pour que la variable aléatoire prenne une valeur appartenant à l'intervalle (α, β) :

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\cdot dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

La probabilité cherchée est ainsi

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

(cette relation est analogue à la définition de la probabilité géométrique pour le cas bidimensionnel, que nous rapportons à la page 487).

Déterminons la loi intégrale de distribution

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Si $x < a$, alors $f(x) = 0$, et, par conséquent,

$$F(x) = 0.$$

Si $a < x < b$, alors $f(x) = \frac{1}{b-a}$ et, par conséquent,

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\cdot dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Si $b < x$, alors

$$f(x) = 0, \quad \int_b^{\infty} f(x)\,dx = 0,$$

par conséquent,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

(cf. fig. 425).

Rapportons maintenant quelques exemples concrets de variables aléatoires distribuées suivant une loi uniforme.

Exemple 1. Lors de la mesure d'une grandeur on effectue un certain arrondissement jusqu'à la division la plus proche de l'échelle. L'erreur commise au cours de cet arrondissement est une variable aléatoire distribuée suivant une loi uniforme. Si $2l$ représente le nombre d'unités dans une division de l'échelle, la densité de probabilité de cette variable aléatoire sera

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x < -l,$$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \quad \text{si } -l < x < l,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } l < x.$$

Ici $a = -l, \quad b = l, \quad c = \frac{1}{2l}$.

Exemple 2. Une roue symétrique en rotation est arrêtée par frottement. L'angle θ, formé par un certain rayon mobile de la roue avec un rayon immobile après l'arrêt de la roue, est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est

$$f(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta < 0,$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{si } 0 < \theta < 2\pi,$$

$$f(\theta) = 0 \quad \text{si } 2\pi < \theta.$$

§ 14. Caractéristiques numériques d'une variable aléatoire continue

Considérons, de même que nous l'avons fait pour une variable aléatoire discrète, les caractéristiques numériques d'une variable aléatoire continue $\bar{x}$ de densité de probabilité $f(x)$.

Définition 1. On appelle *espérance mathématique* de la variable aléatoire continue x de densité de probabilité $f(x)$ l'expression

$$\mathbf{M}[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si la variable aléatoire x ne peut prendre des valeurs que dans l'intervalle fini $[a, b]$, l'espérance mathématique $\mathbf{M}[\bar{x}]$ est donnée par la formule

$$\mathbf{M}[\bar{x}] = \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{1'}$$

On peut considérer la formule (1′) comme une généralisation de la formule (1) du § 9.

En effet, découpons le segment $[a, b]$ en intervalles (x_{k-1}, x_k). Choisissons un point ξ_k dans chacun de ces intervalles. Considérons la variable aléatoire discrète auxiliaire ξ, qui peut prendre les valeurs

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_k, \quad \ldots, \quad \xi_n.$$

Supposons que les probabilités des valeurs correspondantes de la variable aléatoire discrète soient $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$:

$$p_1 = f(\xi_1)\,\Delta x_1,\ p_2 = f(\xi_2)\,\Delta x_2, \ldots, p_k = \\ = f(\xi_k)\,\Delta x_k, \ldots, p_n = f(\xi_n)\,\Delta x_n\ ^{*)}.$$

L'espérance mathématique de cette variable aléatoire discrète ξ sera

$$\mathbf{M}[\xi] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k p_k$$

ou

$$\mathbf{M}[\xi] = \xi_1 f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \xi_2 f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots \\ \ldots + \xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k + \ldots + \xi_n f(\xi_n)\,\Delta x_n = \\ = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Passant à la limite quand $\max \Delta x_k \to 0$, nous obtenons:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b x f(x)\, dx.$$

L'expression du second membre est l'espérance mathématique de la variable aléatoire *continue* x, qui peut prendre n'importe quelle valeur x appartenant au segment $[a, b]$. On peut reprendre un raisonnement analogue pour l'intervalle infini, c'est-à-dire pour l'expression (1). Les formules (1) et (1′) sont analogues à la formule (1) du § 9 pour une variable aléatoire discrète. Pour l'espérance mathématique nous emploierons également la notation m_x.

---

*) Par ailleurs $f(\xi_k)\,\Delta x_k$ est la probabilité pour que la variable aléatoire continue x prenne une valeur appartenant à l'intervalle (x_{k-1}, x_k).

On dénomme l'espérance mathématique *centre de distribution* des probabilités de la variable aléatoire $\bar{x}$ (fig. 426). Si la courbe de distribution est symétrique par rapport à l'axe Oy, autrement si la fonction $f(x)$ est paire, alors il est évident que

$$\mathbf{M}[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0.$$

Dans ce cas, le centre de distribution coïncide avec l'origine des

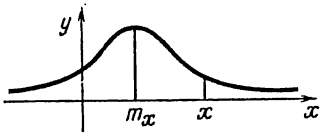


Fig. 426

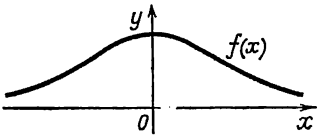


Fig. 427

coordonnées (fig. 427). Considérons la variable aléatoire centrée $\bar{x} - m_x$. Trouvons son espérance mathématique

$$\mathbf{M}[\bar{x} - m_x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$
$$= m_x - m_x \cdot 1 = 0.$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire centrée est nulle.

Définition 2. On appelle *variance* de la variable aléatoire $\bar{x}$ l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée correspondante

$$\mathbf{D}[\bar{x}] \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx. \tag{2}$$

La formule (2) est analogue à la formule (2) du § 10.

Définition 3. On appelle *écart quadratique moyen* de la variable aléatoire $\bar{x}$ la racine carrée de la variance

$$\sigma[\bar{x}] = \sqrt{\mathbf{D}[\bar{x}]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx}. \tag{3}$$

Cette formule est analogue à la formule (3) du § 10. Lors de la considération des exemples concrets nous verrons que de même que

dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la variance et l'écart quadratique moyen caractérisent la dispersion des valeurs de la variable aléatoire.

Définition 4. La valeur de la variable aléatoire $\bar{x}$, pour laquelle la densité de probabilité admet sa plus grande valeur, est appelee *mode* et notée M_0. Pour la variable aléatoire $\bar{x}$ dont la courbe de densité est représentée sur les fig. 426 et 427, le mode coïncide avec l'espérance mathématique.

Définition 5. On appelle *médiane* et l'on note M_e le nombre vérifiant l'égalité

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)\,dx = \int_{M_e}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

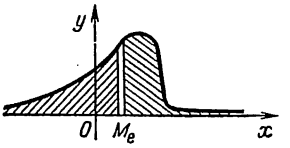


Fig. 428

(fig. 428). Cette dernière égalité peut être mise sous la forme:

$$\mathbf{P}(\bar{x} < M_e) = \mathbf{P}(M_e < \bar{x}) = \frac{1}{2},$$

autrement dit il est également probable que la variable aléatoire $\bar{x}$ prenne une valeur inférieure ou supérieure à M_e.

Notons que la variable aléatoire $\bar{x}$ peut ne pas admettre M_e comme valeur possible.

§ 15. Loi normale de distribution. Espérance mathématique de la distribution normale

L'étude de différents phénomènes variés montre que de nombreuses variables aléatoires, comme par exemple, l'erreur commis au cours de mesure, l'ampleur de l'usure des pièces de nombreux mécanismes, l'écart latéral et l'écart de portée du point d'impact par rapport à un certain centre, au cours d'une tir, etc., possèdent une densité de probabilité s'exprimant par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

On dit alors dans ce cas que la variable aléatoire suit la *loi de distribution normale* (on l'appelle également la loi de Gauss). La courbe de la densité de la loi normale est représentée sur la fig. 429. On a donné à la fin du livre la table des valeurs de la fonction (1) pour $a = 0$, $\sigma = 1$ (cf. table 2). On a étudié en détail une courbe analogue au § 9 du ch. V, tome I.

Montrons tout d'abord que la densité de probabilité (1) vérifie la relation fondamentale (5) du § 12

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

En effet, introduisant la notation

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma} = t, \quad dx = \sqrt{2}\,\sigma\,dt,$$

nous pouvons écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1,$$

car

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

(cf. § 5, ch. XV).

Déterminons l'espérance mathématique d'une variable aléatoire

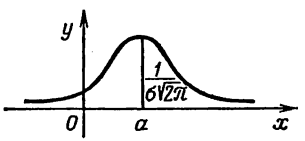


Fig. 429

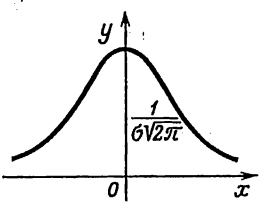


Fig. 430

distribuée suivant la loi normale (1). D'après la formule (1) du § 14 nous avons :

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx. \tag{2}$$

Effectuons le changement de variables

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma} = t,$$

nous obtenons

$$x = a + \sqrt{2}\,\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\,\sigma\,dt.$$

Par conséquent,

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sqrt{2}\,\sigma t)\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2}\, dt.$$

La première intégrale est égale à $\sqrt{\pi}$. Calculons la seconde intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2}\, dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Nous avons ainsi en définitive

$$m_x = a. \tag{3}$$

La valeur du paramètre a entrant dans la formule (1) est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire considérée. Le point $x = a$ est le centre de distribution des probabilités ou le centre de dispersion. La fonction $f(x)$ admet sa plus grande valeur pour $x = a$, par conséquent, la valeur $x = a$ est aussi le *mode* de la variable aléatoire. Comme la courbe (1) est symétrique par rapport à la droite $x = a$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx,$$

autrement dit la valeur $x = a$ est la *médiane* de la distribution normale. Si l'on pose dans la formule (1) $a = 0$, nous obtenons :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{4}$$

La courbe correspondante est symétrique par rapport à l'axe Oy. La fonction $f(x)$ est la densité de la distribution normale de la variable aléatoire dont le centre de distribution des probabilités coïncide avec l'origine des coordonnées (fig. 430). Les caractéristiques numériques des variables aléatoires suivant les lois de distribution (1) et (4), définissant le caractère de la dispersion des valeurs de la variable aléatoire par rapport au centre de dispersion, sont déterminées par la forme de la courbe qui ne dépend pas de la quantité a et, par conséquent, coïncident. La valeur a détermine la grandeur de l'écartement de la courbe (1) vers la droite (si $a > 0$) ou vers la gauche (si $a < 0$). Pour simplifier l'écriture, nous allons conduire les raisonnements ultérieurs pour la densité de probabilité définie par la formule (4).

§ 16. Variance et écart quadratique moyen d'une variable aléatoire suivant la loi de distribution normale

Soit

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

la densité de probabilité de la variable aléatoire $\bar{x}$. On détermine la variance d'une variable aléatoire continue d'après la formule (2) du § 14.

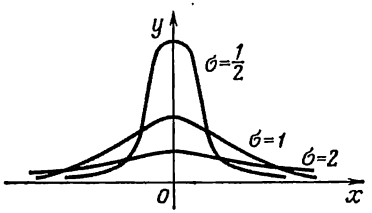


Fig. 431

Dans notre cas

$$m_x = a = 0.$$

Nous avons

$$\mathbf{D}[\bar{x}]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Effectuons le changement de variables $\frac{x}{\sqrt{2}\,\sigma}=t$, alors

$$\mathbf{D}[\bar{x}]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot 2t\cdot e^{-t^2}dt.$$

Intégrant par partie, nous obtenons:

$$\mathbf{D}[\bar{x}]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-t\cdot e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right].$$

Comme

$$\lim_{t\to\infty} t\cdot e^{-t^2}=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

nous avons en définitive

$$\mathbf{D}[\bar{x}]=\sigma^2. \tag{2}$$

Conformément à la formule (3) du § 14 l'écart quadratique moyen sera

$$\sigma[\bar{x}]=\sqrt{\mathbf{D}(\bar{x})}=\sigma. \tag{3}$$

La variance est ainsi égale au paramètre σ^2 entrant dans la formule de la densité de probabilité (1). Nous avons déjà dit plus haut que la variance caractérise la dispersion des valeurs de la variable aléatoire par rapport au centre de dispersion. Voyons maintenant comment la valeur du paramètre σ^2 influe sur la forme de la courbe

de densité. On a représenté sur la fig. 431 les courbes de densité pour les valeurs $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$, $\sigma = 2$. Considérant ces courbes nous voyons que plus σ est petit, plus le maximum de la fonction $f(x)$ est grand, la probabilité des valeurs proches du centre de dispersion ($x = 0$) est grande, la probabilité des valeurs éloignées du centre est petite. On peut formuler ce fait de la manière suivante: plus la variance σ^2 est petite, plus la dispersion des valeurs de la variable aléatoire est faible.

§ 17. Probabilité d'appartenance d'une valeur de la variable aléatoire à un intervalle donné. Fonction de Laplace. Fonction de répartition de la loi normale

Déterminons conformément à la formule (3) du § 12 la probabilité pour que la valeur prise par la variable aléatoire $\bar{x}$, de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

tombe dans l'intervalle (α, β):

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

ou

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx \tag{1}$$

(fig. 432). Effectuons le changement de variables

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\,\sigma} = t.$$

Nous obtenons

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt. \tag{1'}$$

L'intégrale figurant au second membre ne s'exprime pas au moyen de fonctions élémentaires. Les valeurs de cette intégrale s'expriment en fonction des valeurs de l'*intégrale de probabilité*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt. \tag{2}$$

Indiquons certaines propriétés de la fonction $\Phi(x)$, que nous utiliserons par la suite.

1. $\Phi(x)$ est définie pour toutes les valeurs de x.
2. $\Phi(0) = 0$.
3. $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$.
4. $\Phi(x)$ est monotone croissante dans l'intervalle $(0, \infty)$.
5. $\Phi(x)$ est une fonction impaire, car

$$\Phi(-x) = -\Phi(x). \tag{3}$$

6. Le graphique de la fonction $\Phi(x)$ est représenté sur la fig. 433.

Il existe des tables très détaillées des valeurs de cette fonction. Nous en donnons un extrait à la fin du livre (cf. table 1).

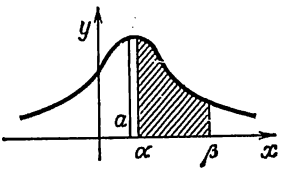


Fig. 432

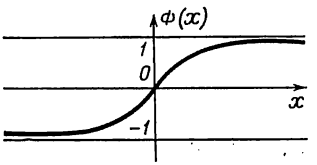


Fig. 433

Ecrivons l'égalité (1′) en utilisant le théorème sur le partage de l'intervalle d'intégration

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{0} e^{-t^2}\,dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt \right].$$

Cette dernière égalité peut être mise sous la forme:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt \right].$$

Utilisant la fonction $\Phi(x)$ (cf. (2)), nous pouvons exprimer en définitive la probabilité pour que la variable aléatoire $\bar{x}$ distribuée suivant la loi normale prenne une valeur appartenant à l'intervalle

(α, β) :

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{4}$$

Pour $a = 0$ nous obtenons :

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{5}$$

Egalant les seconds membres de l'égalité (1) pour le cas $a = 0$ et de l'égalité (5), nous obtenons :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{5'}$$

On a souvent à calculer la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire tombe dans l'intervalle $(a - l, a + l)$, symétri-

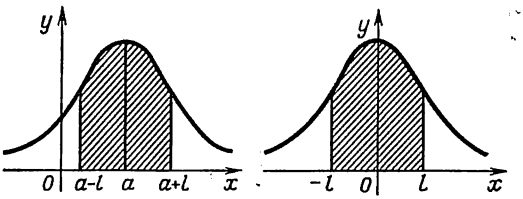


Fig. 434

que par rapport au point $x = a$ (fig. 434). Dans ce cas la formule (4) prend la forme :

$$\mathbf{P}(a - l < \bar{x} < a + l) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Tenant compte du fait que $\Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) = -\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ (cf. formule (3)), nous obtenons en définitive :

$$\mathbf{P}(a - l < \bar{x} < a + l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right). \tag{6}$$

Le second membre ne dépend pas de la position du centre de dispersion, par conséquent, nous obtenons pour $a = 0$:

$$\mathbf{P}(-l < \bar{x} < l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right). \tag{7}$$

Exemple 1. La variable aléatoire $\bar{x}$ suit la loi normale de centre de dispersion $a = 0{,}5$ et de variance $\sigma^2 = \frac{1}{8}$. Déterminer la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire $\bar{x}$ tombe dans l'intervalle (0,4 ; 0,6) (fig. 435).

Solution. Ici $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 2$. Nous obtenons en vertu de la formule (4):

$$\mathbf{P}(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = \frac{1}{2}\{\Phi[2(0{,}6-0{,}5)] - \Phi[2(0{,}4-0{,}5)]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{\Phi(0{,}2) - \Phi(-0{,}2)\}.$$

Or $\Phi(-0{,}2) = -\Phi(0{,}2)$ (cf. formule (3)), de sorte que nous pouvons écrire

$$\mathbf{P}(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}2) + \Phi(0{,}2)] = \Phi(0{,}2).$$

Nous tirons de la table des valeurs de la fonction $\Phi(x)$ (cf. la table 1 à la fin du livre) la probabilité correspondante

$$\mathbf{P}(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = 0{,}223.$$

Exemple 2. La longueur d'une pièce fabriquée par une machine automatique est une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale de paramètres $\mathbf{M}[\bar{x}] = 10$, $\sigma^2 = \frac{1}{200}$. Trouver la probabilité du rebut, si les dimensions admissibles de la pièce doivent être $10 \pm 0{,}05$.

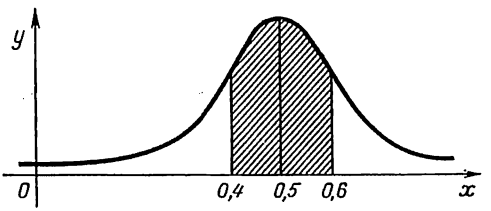


Fig. 435

Solution. Dans notre cas $a = 10$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 10$, $\sigma = \frac{1}{10\sqrt{2}}$. La probabilité de rebut p_{reb} s'exprime donc, conformément à la formule (4), de la manière suivante:

$$p_{\text{reb}} = 1 - \mathbf{P}(9{,}95 < \bar{x} < 10{,}05) = 1 - \frac{1}{2}\{\Phi[10(10{,}05-10)] -$$

$$- \Phi[10(9{,}95-10)]\} = 1 - \frac{1}{2}\{\Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5)\} =$$

$$= 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48.$$

Remarque. On utilise souvent au lieu de la fonction $\Phi(x)$ (2) la *fonction de Laplace*:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{8}$$

Cette fonction de Laplace est liée à la fonction $\Phi(x)$ par une relation simple. Effectuant dans l'intégrale (8) le changement de variables

$\frac{t}{\sqrt{2}} = z$, nous obtenons

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Nous avons ainsi

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{9}$$

et, évidemment,

$$\overline{\Phi}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \Phi(x). \tag{10}$$

Nous pouvons mettre la formule (5), en utilisant la fonction $\overline{\Phi}(x)$ et la relation (9), sous la forme:

$$\mathbf{P}(\alpha < \overline{x} < \beta) = \overline{\Phi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \overline{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \tag{11}$$

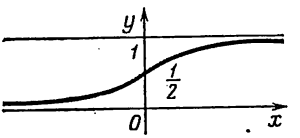


Fig. 436

et pour $\sigma = 1$

$$\mathbf{P}(\alpha < \overline{x} < \beta) = \overline{\Phi}(\beta) - \overline{\Phi}(\alpha).$$

Nous donnons à la fin du livre un extrait de la table de la fonction de Laplace (cf. table 3).

Déterminons maintenant la *fonction intégrale* de la loi de distribution normale. Nous avons d'après la formule (1) du § 13:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \mathbf{P}(-\infty < \overline{x} < x).$$

Utilisant la formule (4) pour le cas $\alpha = -\infty$, $\beta = x$, nous obtenons

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi(-\infty)\right],$$

mais $\Phi(-\infty) = -1$ (cf. formule (3)). Par conséquent, nous obtenons

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) + 1\right]. \tag{12}$$

Le graphique de la fonction $F(x)$ pour $a = 0$ est représenté sur la fig. 436.

§ 18. Ecart médian

Dans de nombreuses applications de la théorie des probabilités, en particulier dans la théorie des erreurs d'observation, la théorie du tir, etc., on utilise une caractéristique de dispersion que l'on appelle *écart* (*erreur*) *médian*.

Définition 1. On appelle *écart médian* un nombre E tel, que la probabilité pour que la variable aléatoire (l'erreur, par exemple) soumise à la loi normale

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

appartienne à l'intervalle $(-E, E)$, soit égale à $\frac{1}{2}$ (fig. 437), autrement dit

$$\mathrm{P}(-E<\bar{x}<E)=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Pour toute variable aléatoire $\bar{x}$ suivant la loi de distribution normale dont le centre de dispersion est $x=a$, l'écart médian E (fig. 438) vérifie la relation

$$\mathrm{P}(a-E<\bar{x}<a+E)=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Exprimons l'écart quadratique moyen σ en fonction de l'erreur médiane E.

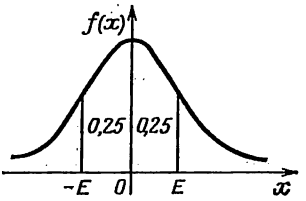


Fig. 437

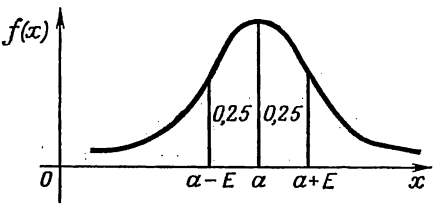


Fig. 438

Nous exprimons le premier membre de l'égalité (1) en fonction de $\Phi(x)$:

$$\mathrm{P}(-E<\bar{x}<E)=\int_{-E}^{E}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx. \tag{3}$$

D'après la formule (7) du § 17 nous obtenons:

$$\mathrm{P}(-E<\bar{x}<E)=\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right). \tag{4}$$

Les premiers membres des égalités (1) et (4) sont égaux, par conséquent, les seconds membres le sont aussi

$$\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}. \tag{5}$$

D'après la table des valeurs de la fonction $\Phi(x)$ nous trouvons la valeur de l'argument $x=0{,}4769$, pour laquelle $\Phi(x)=\frac{1}{2}$. Par

conséquent, nous avons

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}=0{,}4769.$$

Il est admis de noter le nombre 0,4769 par la lettre ρ:

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}=\rho=0{,}4769. \tag{6}$$

Il en découle

$$\left.\begin{aligned} E&=\rho\sqrt{2}\,\sigma,\\ \sigma&=\frac{E}{\rho\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

§ 19. Expression de la loi normale en fonction de l'écart médian. Fonction réduite de Laplace

Exprimant le paramètre σ en fonction du paramètre E d'après la formule (7) du § 18 et portant cette valeur dans la formule (4) du § 15, nous obtenons l'expression de la loi normale en fonction de l'écart médian

$$f(x)=\frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E^2}}. \tag{1}$$

La probabilité, pour que la variable aléatoire (par exemple, l'erreur d'observation) appartienne à l'intervalle (α, β), sera, conformément à la formule (5) du § 17,

$$\mathbf{P}(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\rho\frac{\beta}{E}\right)-\Phi\left(\rho\frac{\alpha}{E}\right)\right] \tag{2}$$

et conformément à la formule (7) du § 17

$$\mathbf{P}(-l<\bar{x}<l)=\Phi\left(\rho\frac{l}{E}\right). \tag{3}$$

Les nombres $\frac{\beta}{E}$ et $\frac{\alpha}{E}$ figurant dans le second membre de la formule (2) sont définis par la nature du problème considéré, ρ est un nombre connu: $\rho = 0{,}4769$.

Pour éviter d'avoir chaque fois à effectuer la multiplication par ρ, on a établi des tables pour la fonction $\Phi(\rho x)$. Cette fonction est notée $\hat{\Phi}(x)$:

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x). \tag{4}$$

La fonction $\hat{\Phi}(x)$ est appelée *fonction réduite de Laplace*. On donne à la fin du livre un extrait de la table des valeurs de cette fonction (cf. table 1).

En vertu de la formule (2) du § 17 cette fonction est définie par l'intégrale

$$\hat{\Phi}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho x} e^{-t^2}\,dt.$$

Effectuant le changement de variables $t=\rho z$, nous obtenons :

$$\hat{\Phi}(x)=\frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-\rho^2 z^2}\,dz. \tag{5}$$

Exprimons le second membre de l'égalité (2) à l'aide de la fonction réduite de Laplace

$$\mathbf{P}(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E}\right)\right]. \tag{6}$$

En particulier, la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire tombe dans un intervalle symétrique par rapport au centre de dispersion $(-l,\ l)$ est donnée, en vertu de la formule (3), par l'expression :

$$\mathbf{P}(-l<\bar{x}<l)=\hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \tag{7}$$

et

$$\mathbf{P}(0<\bar{x}<l)=\frac{1}{2}\hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right). \tag{8}$$

Notons que la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire $\bar{x}$ appartienne à l'intervalle $(\alpha,\ \beta)$ exprimée à l'aide de l'écart médian E, si l'espérance mathématique $a\neq 0$, sera (cf. formule (4) du § 17) :

$$\mathbf{P}(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\rho\,\frac{\beta-a}{E}\right)-\hat{\Phi}\left(\rho\,\frac{\alpha-a}{E}\right)\right]. \tag{9}$$

Cette dernière égalité peut s'exprimer à l'aide de la fonction réduite de Laplace de la manière suivante :

$$\mathbf{P}(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta-a}{E}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha-a}{E}\right)\right]. \tag{10}$$

§ 20. Règle des trois sigmas. Echelle des probabilités de distribution des erreurs

Pour la réalisation pratique des calculs c'est l'écart quadratique moyenne σ qu'on choisit pour unité de mesure de l'écart d'une variable aléatoire suivant une loi normale à partir du centre de dispersion (de l'espérance mathématique). On obtient alors en vertu de la

formule (7) du § 17 des égalités qui sont d'une grande utilité dans des calculs :

$$\mathbf{P}(-\sigma < \bar{x} < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683,$$

$$\mathbf{P}(-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}954,$$

$$\mathbf{P}(-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}997.$$

On a donné une image géométrique de ces résultats sur la fig. 439.

Il est presque certain que la variable aléatoire (l'erreur) ne s'écartera pas en valeur absolue de l'espérance mathématique de plus de 3σ. Cette proposition est appelée la *règle des trois sigmas.*

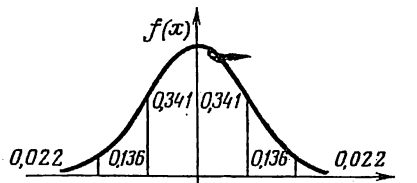


Fig. 439

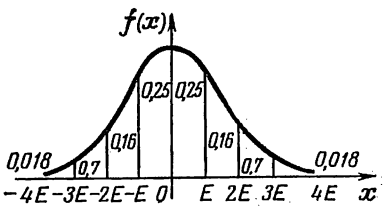


Fig. 440

Pour le traitement de diverses données statistiques, il est utile de connaître la probabilité pour la variable aléatoire $\bar{x}$ d'appartenir aux intervalles $(0, E)$, $(E, 2E)$, $(2E, 3E)$, $(3E, 4E)$, $(4E, 5E)$ si la densité de probabilité correspondante est donnée par la formule (1) du § 19. La connaissance de ces probabilités permet, dans de nombreux cas, de réduire les calculs et facilite l'analyse des phénomènes.

Pour calculer ces probabilités nous utiliserons la formule (8) du § 19 et la table de la fonction $\hat{\Phi}(x)$:

$$\mathbf{P}(0 < \bar{x} < E) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}(1) = 0{,}2500,$$

$$\mathbf{P}(E < \bar{x} < 2E) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(2) - \hat{\Phi}(1)] = 0{,}1613,$$

$$\mathbf{P}(2E < \bar{x} < 3E) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(3) - \hat{\Phi}(2)] = 0{,}0672,$$

$$\mathbf{P}(3E < \bar{x} < 4E) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(4) - \hat{\Phi}(3)] = 0{,}0180,$$

$$\mathbf{P}(4E < \bar{x} < \infty) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(\infty) - \hat{\Phi}(4)] = \frac{1}{2}[1 - 0{,}9930] = 0{,}0035.$$

Les résultats des calculs sont illustrés géométriquement sur la fig. 440 que l'on appelle *échelle de dispersion des erreurs.* Il découle

de ces calculs, qu'il est pratiquement certain que la valeur de la variable aléatoire appartient à l'intervalle $(-4E, 4E)$. La probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire tombe en dehors de cet intervalle est inférieure à 0,01.

Exemple On a établi expérimentalement que l'erreur de mesure d'un appareil servant à évaluer les distances est distribuée suivant une loi normale d'erreur médiane $E = 10$ m. Déterminer la probabilité avec laquelle la distance mesurée à l'aide de cet appareil s'écarte de la distance véritable de moins de 15 m.

Solution. Dans notre cas $l = 15$ m, $E = 10$ m. Nous obtenons d'après la formule (7) du § 19:

$$\mathbf{P}(-15 < \bar{x} < 15) = \hat{\Phi}\left(\frac{15}{10}\right) = \hat{\Phi}(1{,}5) = 0{,}6883 \approx 0{,}69.$$

§ 21. Erreur arithmétique moyenne

On introduit, pour caractériser les erreurs, la notion d'*erreur arithmétique moyenne* égale à l'espérance mathématique de la valeur absolue des erreurs. Nous désignerons l'erreur arithmétique moyenne par d. Déterminons l'erreur arithmétique moyenne si les erreurs x suivent la loi normale (4) du § 15. D'après une formule analogue à la formule (2) du § 15 nous obtenons ($a = 0$):

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ainsi l'erreur arithmétique moyenne s'exprime en fonction de l'erreur quadratique moyenne σ au moyen de l'expression

$$d = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{1}$$

§ 22. Mesure de précision. Relations entre les caractéristiques de distribution des erreurs

Au cours de l'étude de nombreux processus, on écrit la densité de probabilité de la loi normale sous la forme

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}. \tag{1}$$

La comparaison de la formule (1) et de la formule (4) du § 15 permet d'établir que le paramètre introduit h s'exprime en fonction

de σ de la manière suivante:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \tag{2}$$

La quantité h est inversement proportionnelle à σ, autrement dit, inversement proportionnelle à l'écart quadratique moyen ou à l'erreur quadratique moyenne. Plus la variance σ^2 est petite, c'est-à-dire plus la dispersion est faible, plus la valeur de h est grande. C'est pourquoi h est appelée *mesure de précision*.

Nous obtenons de la formule (2) et de la formule (1) du § 21

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \tag{3}$$

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

En appliquant les formules (7) du § 18 et (3), on exprime l'erreur médiane E en fonction de la mesure de précision h de la manière suivante

$$E = \frac{\rho}{h}. \tag{5}$$

Il est parfois nécessaire d'exprimer une caractéristique de distribution des erreurs en fonction d'une autre. C'est pourquoi les égalités suivantes sont parfois utiles:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E}{\sigma} = \rho\sqrt{2} = 0{,}6745, \quad \frac{E}{d} = \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8453, \quad \frac{\sigma}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533, \\ &\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} = 1{,}4826, \quad \frac{d}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} = 1{,}1829. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 23. Variable aléatoire bidimensionnelle

La valeur d'une variable aléatoire bidimensionnelle est déterminée par deux nombres x et y; pour cette variable aléatoire à deux dimensions nous emploierons la notation $(\bar{x}, \bar{y})$. Supposons que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ prennent des valeurs discrètes x_i et y_j. Supposons encore qu'à chaque couple de valeurs (x_i, y_j) appartenant à un certain ensemble corresponde une probabilité déterminée p_{ij}. Nous pouvons dresser le tableau de distribution des probabilités de la variable aléatoire à deux dimensions discrète.

$\bar{y}$ \ $\bar{x}$	x_1	x_2	...	...	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}				p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}				p_{n2}
$\vdots$						
$\vdots$						
y_m	p_{1m}	p_{2m}				p_{nm}

Il est évident, que l'on doit avoir l'égalité

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{1}$$

Définissons maintenant la variable aléatoire à deux dimensions continue. La probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire bidimensionnelle $(\bar{x}, \bar{y})$ vérifie les inégalités $x < \bar{x} < x + \Delta x$, $y < \bar{y} < y + \Delta y$ sera notée ainsi :

$$\mathbf{P}\,(x < \bar{x} < x + \Delta x,\ y < \bar{y} < y + \Delta y).$$

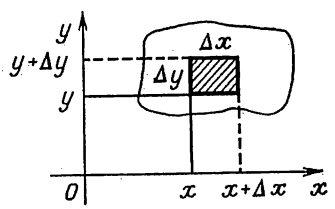


Fig. 441

Définition 1. La fonction $f(x, y)$ est appelée *densité de probabilité* de la variable aléatoire bidimensionnelle $(\bar{x}, \bar{y})$ si, aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ près, on a l'égalité approchée suivante

$$\mathbf{P}\,(x < \bar{x} < x + \Delta x,\ y < \bar{y} < y + \Delta y) \cong f(x, y)\,\Delta x \cdot \Delta y. \tag{2}$$

La formule (2) est entièrement analogue à la formule (2) du § 12.

Considérons un système rectangulaire de coordonnées (xOy). Si nous représentons les valeurs de la variable aléatoire $(\bar{x}, \bar{y})$ par les points du plan de coordonnées correspondantes x et y, l'expression $\mathbf{P}\,(x < \bar{x} < x + \Delta x,\ y < \bar{y} < y + \Delta y)$ désignera la probabilité pour que la variable aléatoire bidimensionnelle $(\bar{x}, \bar{y})$ prenne une valeur correspondant à un point appartenant au rectangle hachuré

Δs (fig. 441). Nous dirons alors que « la valeur de la variable aléatoire est tombée dans le domaine Δs » *).

Nous désignerons également la probabilité $\mathbf{P}\,(x < \bar{x} < x + \Delta x,\ y < \bar{y} < y + \Delta y)$ par le symbole $\mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset \Delta s]$. Avec cette notation nous pouvons mettre l'égalité (2) sous la forme :

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset \Delta s] \approx f\,(x,\ y)\,\Delta s. \tag{3}$$

Démontrons maintenant le théorème suivant, analogue au théorème 1 du § 12.

Théorème 1. *La probabilité* $\mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D]$, *pour que la variable aléatoire bidimensionnelle* $(\bar{x},\ \bar{y})$ *de densité de probabilité* $f\,(x,\ y)$ *appartienne au domaine* D, *s'exprime par une intégrale double de la fonction* $f\,(x,\ y)$ *étendue au domaine* D, autrement dit,

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D] = \iint\limits_D f\,(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Démonstration. Partageons le domaine D, comme nous l'avons fait dans la théorie des intégrales doubles, en surfaces élémentaires Δs. Pour chaque surface élémentaire, écrivons l'égalité (3) et sommons les premiers et les seconds membres des égalités ainsi obtenues. Etant donné que

$$\sum \Delta s = D \quad \text{et} \quad \sum \mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset \Delta s] = \mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D],$$

nous obtenons une égalité approchée

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D] \approx \sum f\,(x,\ y) \cdot \Delta s,$$

aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à Δs près.

Passant à la limite dans le second membre de cette dernière égalité lorsque $\Delta s \to 0$, nous obtenons au second membre une intégrale double et, en vertu des propriétés de la somme intégrale, l'égalité exacte :

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D] = \iint\limits_D f\,(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Le théorème est démontré.

Remarque 1. Si le domaine D est un rectangle limité par les droites $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$ (fig. 442), alors

$$\mathbf{P}\,[\alpha < \bar{x} < \beta,\ \gamma < \bar{y} < \delta] = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_\gamma^\delta f\,(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

*) Dans l'égalité (3), nous aurions pu prendre une surface de forme arbitraire.

Remarque 2. De même que l'égalité (1) on a également l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1, \tag{6}$$

puisque le fait qu'une variable aléatoire bidimensionnelle prenne une valeur quelconque est un événement certain. Là où, d'après le sens du problème, la fonction $f(x, y)$ n'est pas définie, nous posons $f(x, y) = 0$.

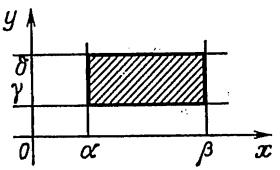


Fig. 442

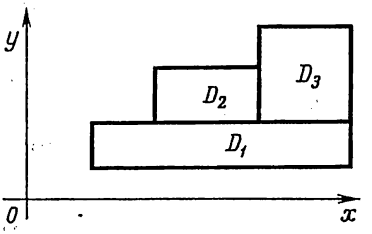


Fig. 443

Si le domaine D se compose de plusieurs rectangles de la forme représentée sur la fig. 443, la probabilité pour que la variable aléatoire appartienne à un tel domaine est déterminée comme la somme des probabilités calculées pour chacun des rectangles, autrement dit, comme la somme des intégrales définies étendues à chaque rectangle :

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_1] + \\ + \mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_2] + \mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_3].$$

Exemple. La densité de probabilité de la variable aléatoire bidimensionnelle est donnée par la formule

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)}.$$

Déterminer la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire appartienne au rectangle limité par les droites $x = 0$, $x = 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}$.

Solution. Nous obtenons en vertu de la formule (5) :

$$\mathbf{P}\left[0 < \bar{x} < 1, \frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{y} < \sqrt{3}\right] = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1 \operatorname{arc\,tg} y\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{24}.$$

Définition 2. La fonction

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)\,du\,dv \tag{7}$$

est appelée *fonction de répartition* de la variable aléatoire bidimensionnelle $(\bar{x}, \bar{y})$.

Il est évident, que la fonction de répartition exprime la probabilité pour que $\bar{x}<x$, $\bar{y}<y$, autrement dit,

$$F(x, y) = \mathbf{P}(\bar{x}<x, \bar{y}<y).$$

Géométriquement parlant la fonction de répartition exprime la probabilité pour que la variable aléatoire bidimensionnelle appartienne au quadrilatère hachuré sur la fig. 444.

En utilisant le théorème sur la dérivation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre, on établit la relation entre la densité de probabilité et la fonction de répartition :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=\int_{-\infty}^{y} f(x, v)\,dv,\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}&=f(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

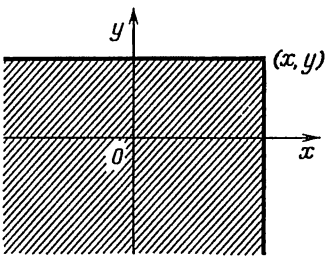


Fig. 444

La densité de probabilité d'une variable aléatoire à deux dimensions est égale à la dérivée mixte du deuxième ordre de la fonction de répartition.

§ 24. Loi normale de distribution sur le plan

Définition 1. La distribution de la variable aléatoire bidimensionnelle est dite *normale* si la densité de probabilité correspondante de cette variable aléatoire a pour expression

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{1}$$

Le graphique de cette fonction est une surface que l'on a représentée sur la fig. 445.

Le *centre de dispersion* de la variable aléatoire dont la loi de distribution est donnée par (1) est le point (0, 0) *). Les valeurs σ_x et σ_y sont appelées les *écarts quadratiques moyens principaux*.

Mettons la formule (1) sous la forme:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{2}$$

On peut ainsi considérer $f(x, y)$ comme le produit des densités de deux variables aléatoires x et y distribuées suivant une loi normale.

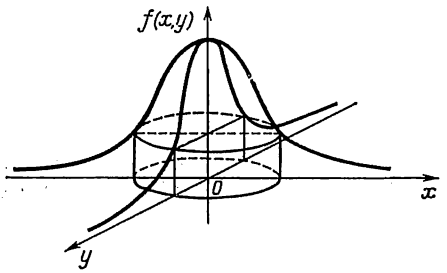


Fig. 445

Déterminons, de même que dans le cas d'une variable aléatoire à une dimension, les *écarts probables principaux* E_x et E_y de la variable aléatoire à deux dimensions (cf. formule (7) du § 18)

$$E_x = \rho\sqrt{2}\,\sigma_x, \quad E_y = \rho\sqrt{2}\,\sigma_y. \tag{3}$$

Portant dans la formule (1) les valeurs de σ_x et σ_y exprimées en fonction de E_x et E_y nous obtenons:

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)}. \tag{4}$$

Considérons les lignes de niveau de la surface (4)

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = k^2 = \text{const} \tag{5}$$

(on aura alors $f(x, y) = \text{const}$). Les lignes de niveau sont des ellipses dont les demi-axes sont respectivement kE_x et kE_y. Les centres des ellipses coïncident avec le centre de dispersion. Ces ellipses sont appelées *ellipses de dispersion*. Leurs axes sont les *axes de dispersion*. On appelle *ellipse unitaire de dispersion* l'ellipse dont les

*) Si le centre de dispersion est situé au point (a, b), la loi de distribution est donnée par la formule

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{1'}$$

demi-axes sont respectivement égaux aux écarts probables E_x et E_y. On obtient l'équation de l'ellipse unitaire en posant dans l'équation (5) $k = 1$:

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = 1. \tag{6}$$

On appelle *ellipse totale de dispersion* l'ellipse dont les demi-axes sont $4E_x$ et $4E_y$. L'équation de cette ellipse est ainsi

$$\frac{x^2}{(4E_x)^2} + \frac{y^2}{(4E_y)^2} = 1. \tag{7}$$

Nous établirons dans le paragraphe suivant que la probabilité pour que la variable aléatoire bidimensionnelle appartienne à l'ellipse totale de dispersion est égale à 0,97, autrement dit, c'est un événement pratiquement certain.

§ 25. Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle normalement distribuée appartienne à un rectangle de côtés parallèles aux axes principaux de dispersion

Soit

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)}.$$

D'après la formule (5) du § 23 (cf. fig. 442) la probabilité pour que la variable aléatoire appartienne au rectangle limité par les droites $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$ est donnée par l'expression :

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta,\ \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)} dx\, dy. \tag{1}$$

Mettant la fonction sous le signe d'intégration sous la forme d'un produit de deux fonctions, nous pouvons écrire

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta,\ \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_\alpha^\beta \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\, E_x} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}} dx \times$$

$$\times \int_\gamma^\delta \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\, E_y} e^{-\rho^2 \frac{y^2}{E_y^2}} dy, \tag{2}$$

et en vertu de la formule (6) du § 19 nous obtenons en définitive:

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta,\ \gamma < \bar{y} < \delta) = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E_x}\right) - \right.$$
$$\left. - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\gamma}{E_y}\right)\right]. \qquad (3)$$

Si l'on pose dans cette dernière formule $\alpha = -l_1$, $\beta = l_1$, $\gamma = -l_2$, $\delta = l_2$, c'est-à-dire si l'on considère un rectangle de centre à l'origine des coordonnées, la formule (3) prendra, en vertu de la formule (7) du § 19, la forme:

$$\mathbf{P}(-l_1 < \bar{x} < l_1,\ -l_2 < \bar{y} < l_2) = \hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right) \cdot \hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right). \qquad (4)$$

R e m a r q u e. On aurait pu également résoudre le problème de la recherche de la probabilité pour que la variable aléatoire appartienne à un rectangle de côtés parallèles aux axes de coordonnées de la manière suivante. Le fait que la variable aléatoire tombe dans un rectangle est un événement composite, consistant en ce que deux événements indépendants sont simultanément réalisés: le fait d'appartenir à la bande $-l_1 < \bar{x} < l_1$ et le fait d'appartenir à la bande $-l_2 < \bar{y} < l_2$. (Pour simplifier l'écriture considérons un rectangle dont le centre est à l'origine des coordonnées.) Supposons que la densité de probabilité de la variable aléatoire $\bar{x}$ soit

$$f_1(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\, E_x} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}.$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire $\bar{y}$ est

$$f_2(y) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\, E_y} e^{-\rho^2 \frac{y^2}{E_y^2}}.$$

Calculons la probabilité pour la variable aléatoire d'appartenir à la bande $-l_1 < \bar{x} < l_1$ et à la bande $-l_2 < \bar{y} < l_2$. Nous obtenons d'après la formule (7) du § 19:

$$\mathbf{P}(-l_1 < \bar{x} < l_1) = \hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right),$$
$$\mathbf{P}(-l_2 < \bar{y} < l_2) = \hat{\Phi}\left(\frac{l^2}{E_y}\right).$$

La probabilité de l'événement composite consistant en la réalisation simultanée de ces deux événements, c'est-à-dire correspondant au fait que la variable aléatoire à deux dimensions tombe dans le rec-

tangle, sera égale au produit des probabilités respectives:

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta,\ \gamma < \bar{y} < \delta) = \mathbf{P}(-l_1 < \bar{x} < l_1) \cdot \mathbf{P}(-l_2 < \bar{y} < l_2) = \\ = \hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right) \cdot \hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right).$$

Nous avons obtenu la formule (4).

§ 26. Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle prenne une valeur appartenant à l'ellipse de dispersion

Dans la théorie des erreurs on doit considérer le problème suivant. Calculer la probabilité pour qu'une variable aléatoire, par exemple une erreur d'observation dans le plan, appartienne à l'ellipse de dispersion

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = k^2, \tag{1}$$

si la densité est donnée par la formule (4) du § 24. D'après la formule (4) du § 23 nous obtenons:

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \iint\limits_{D_e} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right]} dx\, dy, \tag{2}$$

où le domaine D_e est limité par l'ellipse (1). Effectuons le changement de variables en posant

$$x = E_x u,\ y = E_y v;$$

dans ce cas l'ellipse D_e se transformera en cercle

$$u^2 + v^2 = k^2. \tag{3}$$

Le jacobien de la transformation étant égal à $I = E_x E_y$, l'égalité (2) prendra la forme:

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_e] = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_e} \rho^2 \cdot e^{-\rho^2(u^2+v^2)}\, du\, dv. \tag{4}$$

Passons aux coordonnées polaires dans cette dernière intégrale

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi.$$

Le second membre de l'égalité (4) prendra alors la forme:

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_e] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^k \rho^2 \cdot e^{-\rho^2 r^2} r\, dr\, d\varphi.$$

Effectuant les calculs dans le second membre, nous obtenons l'expression de la probabilité d'appartenance à l'ellipse de dispersion

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_e] = 1 - e^{-\rho^2 k^2}. \tag{5}$$

Considérons certains cas particuliers. La probabilité d'appartenance à l'ellipse unitaire de dispersion sera obtenue en posant $k = 1$ dans la formule (5)

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_e]_{k=1} = 1 - e^{-\rho^2} = 0{,}203. \tag{6}$$

La probabilité de tomber dans l'ellipse totale de dispersion (7) du § 24 sera obtenue en posant $k = 4$ dans la formule (5)

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_e]_{k=4} = 1 - e^{-16\rho^2} = 0{,}974. \tag{7}$$

Considérons le cas particulier où dans la formule (4) du § 24 $E_x = E_y = E$. L'ellipse de dispersion (5) du § 24 se transforme alors en cercle

$$x^2 + y^2 = k^2E^2 \tag{8}$$

de rayon $R = kE$. La probabilité pour que la variable aléatoire à deux dimensions appartienne au cercle de rayon R sera alors, conformément à la formule (5),

$$\mathbf{P}\,[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_R] = 1 - e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}}. \tag{9}$$

D é f i n i t i o n 1. On appelle *écart radial probable* un nombre E_R tel que la probabilité pour qu'une variable aléatoire à deux dimensions appartienne au cercle de rayon $R = E_R$ est égale à $\frac{1}{2}$.

Il découle de la définition, que la quantité $R = E_R$ est déterminée à partir de la relation

$$1 - e^{-\rho^2 \frac{E_R^2}{E^2}} = \frac{1}{2}.$$

Nous trouvons de la table des valeurs de la fonction exponentielle

$$E_R = 1{,}75E.$$

§ 27. Problèmes de la statistique mathématique. Matériel statistique

Le résultat des observations et de l'enregistrement des phénomènes aléatoires en masse permettent d'obtenir les données statistiques, ou le matériel statistique. En particulier, ce matériel statistique peut être constitué par les erreurs de différentes mesures.

Si la grandeur observée est une variable aléatoire, elle est étudiée par les méthodes de la théorie des probabilités. Pour comprendre

la nature de cette variable aléatoire, on doit connaître sa loi de distribution. La détermination des lois de distribution des quantités considérées et l'estimation des valeurs des paramètres de la distribution à l'appui des valeurs observées constituent l'objet de la statistique mathématique.

Un autre problème de la statistique mathématique consiste en l'élaboration des méthodes de traitement et d'analyse du matériel statistique afin d'obtenir des conclusions déterminées indispensables pour l'organisation du processus optimal auquel participent les grandeurs considérées.

Citons quelques exemples d'observations réalisées sur divers phénomènes permettant d'obtenir en résultat le matériel statistique.

Exemple 1. Au cours de mesures réitérées d'un certain objet à l'aide d'un instrument de mesure, en particulier, lors de la détermination de l'éloignement d'un certain objet, on obtient diverses valeurs de la grandeur observée. Ces valeurs seront dites *valeurs observées* (nous appellerons ainsi toute valeur obtenue au cours de l'étude d'un phénomène quelconque).

Les valeurs ainsi obtenues doivent être d'abord systématisées et traitées avant que l'on puisse formuler des conclusions quelconques à leur sujet.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la différence δ entre la valeur observée x et la valeur véritable de la quantité observée a ($x - a = \delta$) est appelée *erreur de mesure*. On peut exprimer ce que nous avons dit plus haut dans le langage de la théorie des erreurs. Les erreurs de mesure nécessitent un traitement mathématique avant que l'on puisse formuler des conclusions déterminées.

Exemple 2. Dans la production en masse on est amené à considérer la valeur de l'écart d'une certaine dimension de la pièce fabriquée (par exemple, la longueur) d'une certaine cote donnée (erreur de fabrication).

Exemple 3. La différence entre les coordonné s du point d'impact, au cours d'un tir, et celles du point de visée constitue l'erreur de tir (la dispersion). Ces erreurs doivent être soumises à une étude mathématique.

Exemple 4. Les résultats des mesures de la valeur de l'écart des dimensions d'une pièce après exploitation de ses dimensions avant la mise en exploitation (dimensions de projet) doivent être soumis à une analyse mathématique. On peut également considérer ces écarts comme des « erreurs ».

Il découle des exemples donnés que les quantités considérées sont des variables aléatoires et que chaque valeur observée doit être considérée comme une valeur particulière de la variable aléatoire.

§ 28. Série statistique. Histogramme

On dispose le matériel statistique obtenu en résultat des observations (des mesures) dans un tableau formé de deux lignes. Dans la première ligne on note le numéro de la mesure i, dans la seconde

la valeur obtenue x_i de la quantité mesurée x. Un tableau de ce genre est appelé *série statistique simple*. Quand le nombre de mesures est très élevé il est difficile d'avoir une vue d'ensemble du matériel statistique figurant dans ce tableau et, par conséquent, son analyse est malaisée. C'est pourquoi à la base de la série statistique simple on effectue des *groupements*. On les réalise de la manière suivante.

i	1	2	3	...	i	...	n
x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n

On partage tout l'intervalle des valeurs obtenues de la quantité x en petits intervalles égaux (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ et l'on compte le nombre m_k de valeurs de x tombant dans l'intervalle (a_{k-1}, a_k). Les valeurs tombant sur l'extrémité de l'intervalle sont rapportées soit à l'intervalle de gauche, soit à l'intervalle de droite (on décide parfois d'en affecter la moitié à l'intervalle de gauche et l'autre moitié à l'intervalle de droite). Le nombre

$$\frac{m_k}{n} = p_k^* \tag{1}$$

est la fréquence relative correspondant à l'intervalle (a_{k-1}, a_k). Il est évident que

$$\sum_{k=1}^{\lambda} p_k^* = 1. \tag{2}$$

A l'appui des résultats d'un tel traitement, on dresse un tableau formé de trois lignes. Dans la première ligne on indique les intervalles dans l'ordre de croissance des a_k, dans la seconde ligne les nombres m_k qui leur correspondent, dans la troisième ligne les fréquences $p_k = \frac{m_k}{n}$.

Intervalles	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{k-1}, a_k)	...	$(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

C'est ainsi que l'on effectue le *groupement*. On peut également le réaliser géométriquement de la manière suivante. Sur l'axe Ox

on note les points $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_\lambda$. Sur le segment $[a_{k-1}, a_k]$ pris comme base, on construit un rectangle dont l'aire est égale à p_k^*. La figure ainsi obtenue est appelée *histogramme* (fig. 446).

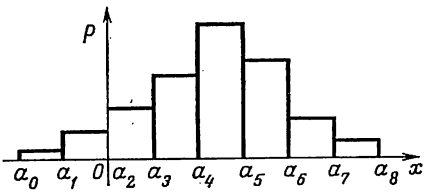


Fig. 446

Sur la base du groupement et de l'histogramme on construit à une certaine approximation la fonction de répartition empirique.

Le traitement ultérieur des données est conduit de la manière suivante. On désigne par $\tilde{x}_k$ les milieux des intervalles (a_{k-1}, a_k) et l'on estime que c'est la valeur du résultat d'une mesure, qui est répétée m_k fois. Après quoi, on substitue au tableau donnant le groupement des données le tableau suivant.

$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	...	$\tilde{x}_k$	...	$\tilde{x}_\lambda$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Ce traitement est réalisé en supposant que toutes les valeurs à l'intérieur de l'intervalle (a_{k-1}, a_k) sont proches les unes des autres de sorte que l'on peut les estimer égales à l'abscisse x_k^* du milieu de l'intervalle.

Exemple. On a effectué 100 mesures de l'éloignement d'un objectif dont les résultats ont donné après groupement le tableau suivant.

Intervalles	80-110	110-140	140-170	170-200	200-230	230-260	260-290	290-320
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

En utilisant les résultats du groupement, nous construisons la représentation graphique de la série statistique (l'histogramme) (fig. 447).

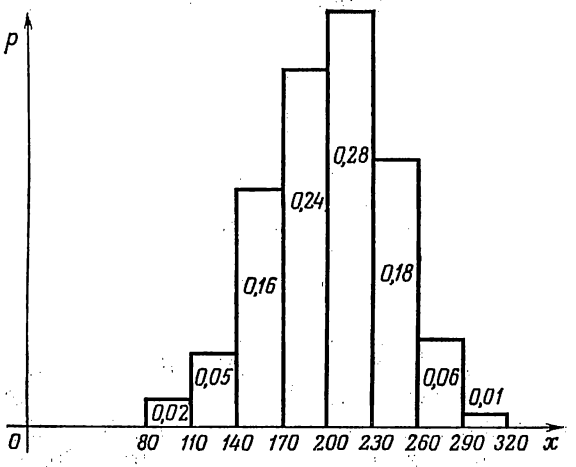


Fig. 447

Dressons ensuite le tableau suivant.

x_k	95	125	155	185	215	245	275	305
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

§ 29. Détermination de la valeur acceptable d'une grandeur mésurée

Supposons que les résultats des mesures d'une certaine quantité aient donné les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut les considérer comme les valeurs particulières de la variable aléatoire x. On adopte alors en tant que valeur acceptable de la quantité à définir la moyenne arithmétique des valeurs obtenues

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{1}$$

La valeur m_x^* est appelée la *moyenne statistique*.

Si le nombre de mesures n est grand, on utilise le matériel du tableau considéré au § 28 et l'on calcule m_x^* de la manière suivante:

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots + \tilde{x}_k m_k + \ldots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{n}$$

ou, en utilisant les notations (1) du § 28,

$$m_x^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k p_k^*, \tag{2}$$

la valeur obtenue est appelée la *moyenne pondérée.*

R e m a r q u e. Dans ce qui suit nous désignerons les résultats des calculs réalisés d'après les formules (1) et (2) par une même lettre. Cette remarque se rapportera également aux formules (3) et (4).

On peut démontrer que sous certaines hypothèses restrictives la moyenne statistique tend en probabilité lorsque $n \to \infty$ vers l'espérance mathématique de la variable aléatoire x. Cette assertion découle du théorème de Tchébychev.

Déterminons maintenant la *variance empirique.* Par définition elle est donnée par la formule *):

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2}{n}. \tag{3}$$

Cette quantité caractérise la dispersion des valeurs de la variable observée.

Si l'on utilise le matériel des tableaux du § 28, la variance statistique est donnée par la formule

$$D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - m_k^*)^2 p_k^*. \tag{4}$$

Cette formule est analogue à la formule (2) du § 10.

E x e m p l e. Déterminer la moyenne statistique et la variance statistique d'après le matériel statistique de l'exemple du § 28.

S o l u t i o n. Nous obtenons de la formule (2):

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i p_i^* = 95 \cdot 0{,}02 + 125 \cdot 0{,}05 + 155 \cdot 0{,}16 + 185 \cdot 0{,}24 +$$
$$+ 215\ 0{,}28 + 245 \cdot 0{,}18 + 275 \cdot 0{,}06 + 305 \cdot 0{,}01 = 201{,}20.$$

*) En réalité il est préférable de calculer la variance empirique d'après une autre formule, que nous donnons à la page 551.

En vertu de la formule (4) nous avons :

$$D^*[\bar{x}] = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x^*)^2}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - m_x^*)^2 p_k^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k^2 p_k^* - m_x^{*2} =$$

$$= 95^2 \cdot 0{,}02 + 125^2 \cdot 0{,}05 + 155^2 \cdot 0{,}16 + 185^2 \cdot 0{,}24 + 215^2 \cdot 0{,}28 + 245^2 \cdot 0{,}18 +$$

$$+ 275^2 \cdot 0{,}06 + 305^2 \cdot 0{,}01 - (201{,}20)^2 = 1753{,}56.$$

§ 30. Estimation des paramètres de la loi de distribution. Théorème de Liapounov. Théorème de Laplace

Soit $\bar{x}$ une variable aléatoire, par exemple, le résultat d'une mesure, a la quantité à mesurer, δ l'erreur commise pendant la mesure. Ces quantités sont alors liées par la relation

$$\delta = \bar{x} - a, \quad \bar{x} = a + \delta. \tag{1}$$

De nombreuses expériences et observations montrent que si l'on élimine l'erreur systématique, c'est-à-dire l'erreur constante pour toutes les mesures (par exemple, l'erreur provenant des instruments) ou telle qu'elle varie suivant une loi connue d'une mesure à l'autre, et si l'on élimine les erreurs grossières, les erreurs de mesure suivent une loi de distribution normale dont le centre de distribution est à l'origine des coordonnées. Ce fait est également confirmé par des considérations théoriques.

Si une variable aléatoire est la somme d'un grand nombre de variables aléatoires, cette somme est, sous certaines conditions restrictives, soumise à la loi de distribution normale. Cette assertion est formulée sous forme du *théorème limite central* établi par A. Liapounov (1857-1918). Nous énoncerons ici ce théorème sous une forme quelque peu simplifiée.

Théorème 1. *Si les variables aléatoires indépendantes* $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ *suivent une même loi de distribution d'espérance mathématique* a (*on peut estimer sans restreindre la généralité que* $a = 0$) *et de variance* σ^2, *lorsque* n *croît indéfiniment, la loi de distribution de la somme* $\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i}{\sigma\sqrt{n}}$ *différera aussi peu que l'on veut de la loi normale* ($\bar{y}_n$ *est normée de telle sorte que* $\mathbf{M}[\bar{y}_n] = 0$, $\mathbf{D}[y_n] = 1$).

L'importance pratique du théorème de Liapounov consiste en ce qui suit. On considère une variable aléatoire, par exemple, l'écart d'une certaine quantité d'une valeur donnée. Cet écart est dû à l'action simultanée de nombreux facteurs aléatoires dont chacun

donne une certaine composante de l'écart. Toutes ces composantes nous sont inconnues, de même que peuvent être également inconnues les lois de distribution des variables aléatoires composantes. Or il découle du théorème de Liapounov que la variable aléatoire constituant l'écart global, suit la loi de distribution normale.

Il découle du théorème de Liapounov que si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ sont les résultats des mesures d'une certaine quantité (chacun des $\bar{x}_i$ est une variable aléatoire), alors la variable aléatoire définie par la moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n}{n},$$

suit, pour un n assez grand, une loi aussi proche que possible de la loi normale si les variables aléatoires suivent chacune une même loi de distribution.

Le théorème reste valable également pour les sommes de variables aléatoires suivant des lois de distribution différentes sous certaines conditions complémentaires qui sont généralement remplies pour les variables aléatoires que l'on considère en pratique. L'expérience montre que pour un nombre de termes de l'ordre de 10 on peut déjà estimer que leur somme est distribuée normalement.

Désignons par $\bar{a}$ et $\bar{\sigma}^2$ les valeurs approchées de l'espérance mathématique et de la variance. Nous pouvons alors écrire les lois approchées de distribution des variables aléatoires $\bar{\delta}$ et $\bar{x}$:

$$f(\bar{\delta}) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\bar{\sigma}^2}} \tag{2}$$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{a})^2}{2\bar{\sigma}^2}}. \tag{3}$$

Le paramètre $\bar{a}$ est déterminé à partir des données expérimentales d'après la formule (1) du § 29

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4}$$

Cela découle du théorème de Tchébychev (1821-1894). Sans nous arrêter sur la démonstration, indiquons qu'il est plus naturel d'estimer le paramètre σ non pas d'après la formule (3) du § 29, mais d'après la formule

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{a})^2}{n-1} \tag{5}$$

Notons que le second membre de (5) et le second membre de la formule (3) du § 29 diffèrent du facteur $\frac{n}{n-1}$ qui dans les problèmes pratiques est proche de l'unité.

Exemple 1. Donner l'expression de la loi de distribution de la variable aléatoire à l'aide des résultats de mesure rapportés à l'exemple du § 28 et les résultats des calculs rapportés à l'exemple du § 29.

Solution. D'après des calculs effectués dans l'exemple du § 29, nous obtenons:

$$\bar{a} = m_x^* = 201,$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{100}{99} \cdot 1754 = 1771,$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{1771} \approx 41.$$

Portant ces valeurs dans la formule (3), nous avons:

$$f(x) = \frac{1}{41\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-201)^2}{2 \cdot 1771}}$$

Remarque. Si l'on a obtenu la fonction de répartition empirique d'une certaine variable aléatoire x, on peut résoudre le problème de son appartenance ou non à la loi normale de la manière suivante.

Soient données les valeurs de la variable aléatoire:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Déterminons la moyenne arithmétique a d'après la formule (4). Calculons ensuite les valeurs de la variable aléatoire centrée

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Formons une série des valeurs absolues de y_i dans l'ordre de croissance. Si n est impair, on adopte en tant qu'écart médian ou erreur médiane E_m la valeur absolue $|y_m|$ dans la série des valeurs absolues, qui figurent au $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-ième rang, et si n est pair, on adopte en qualité de E_m la moyenne arithmétique des valeurs absolues des quantités figurant aux rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.

Evaluons ensuite l'erreur arithmétique moyenne d'après la formule

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|}{n}. \tag{6}$$

On détermine d'après la formule (5) l'écart quadratique moyen

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n-1}}. \tag{7}$$

On obtient enfin les rapports $\frac{E_m}{d}$ et $\frac{E_m}{\bar{\sigma}}$.

Pour une variable aléatoire suivant la loi de distribution normale, les rapports $\frac{E}{d}$ et $\frac{E}{\sigma}$ sont respectivement égaux à 0,8453 et 0,6745 (cf. formule (6) du § 22). Si les rapports $\frac{E_m}{d}$ et $\frac{E_m}{\bar{\sigma}}$ diffèrent respectivement de 0,8453 et de 0,6745 d'une valeur de l'ordre de 10 %, on adopte conventionnellement que la variable aléatoire y suit une loi normale.

Une conséquence du théorème limite central est l'important théorème de Laplace établissant la probabilité pour qu'un événement soit réalisé non moins de α fois et non plus de β fois. Nous l'énoncerons sans le démontrer.

Théorème 2 (de Laplace). *Si l'on effectue n épreuves indépendantes telles que la probabilité de la réalisation d'un événement A est égale à p pour chacune d'entre elles, on a la relation*

$$\mathbf{P}(\alpha < m < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right)\right], \tag{8}$$

où m est le nombre de réalisations de l'événement A, $q = 1 - p$, $\mathbf{P}(\alpha < m < \beta)$ est la probabilité pour que le nombre de réalisations de l'événement A soit compris entre α et β.

La fonction $\Phi(x)$ a été définie à la page 525.

Indiquons certaines applications du théorème de Laplace pour la résolution des problèmes.

Exemple 2. La probabilité du rebut lors de la fabrication de certaines pièces est 0,01. Déterminer la probabilité pour que sur 1000 prises au hasard le nombre de pièces défectueuses ne soit pas supérieur à 20.

Solution. Dans le cas considéré nous avons

$$n = 1000,\ p = 0{,}01,\ q = 0{,}99,\ \alpha = 0,\ \beta = 20.$$

Nous trouvons alors:

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{0-10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9{,}9}} = -2{,}25,$$

$$\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{npq}} = \frac{20-10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9{,}9}} = 2{,}25.$$

Nous obtenons d'après la formule (8) :

$$P(0 \leqslant m \leqslant 20) = \frac{1}{2}[\Phi(2{,}25) - \Phi(-2{,}25)] = \Phi(2{,}25).$$

Nous trouvons cette valeur d'après la table de la fonction $\Phi(x)$ de sorte qu'en définitive

$$P(0 \leqslant m \leqslant 20) = 0{,}9985.$$

Notons enfin que les théorèmes de Bernoulli, de Liapounov, de Tchébychev, de Laplace dont il a été question dans ce chapitre, sont des expressions multiples de la *loi des grands nombres* de la théorie des probabilités.

Exercices

1. On jette simultanément deux dés. Déterminer la probabilité pour que la somme des points amenés soit égale à 5. Rép. $\frac{1}{9}$.
2. On a préparé pour une loterie 10 billets dont 5 gagnants et 5 perdants. Si l'on achète deux billets, quelle est la probabilité de gagner? Rép. $\frac{7}{9}$.
3. On jette un dé 5 fois. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une fois on n'amène par le chiffre 4 ? Rép. 0,99987.
4. On a numéroté 100 cartes de 1 à 100. Quelle est la probabilité pour que dans le numéro d'une carte choisie au hasard figure le chiffre 5 ? Rép. 0,19.
5. On dispose de 4 machines. La probabilité pour qu'à l'instant t une machine fonctionne est égale à 0,9. Déterminer la probabilité pour qu'à l'instant t l'une au moins des machines fonctionne ? Rép. 0,9999.
6. Dans une première caisse contenant des pièces, 30 % d'entre elles sont de première qualité, et dans une seconde 40 %. On prélève une pièce de chaque caisse. Quelle est la probabilité pour que les deux pièces soient de première qualité ? Rép. 0,12.
7. Un mécanisme se compose de trois pièces. La probabilité de rebut est $p_1 = 0{,}008$ pour la première pièce, $p_2 = 0{,}012$ pour la deuxième, $p_3 = 0{,}01$ pour la troisième. Quelle est la probabilité pour que le mécanisme soit défectueux ? Rép. 0,03.
8. Sur 350 mécanismes, 160 sont de première, 110 de deuxième et 80 de troisième qualités. La probabilité de rebut est de 0,01 pour les mécanismes de la première qualité, de 0,02 pour ceux de la deuxième qualité et de 0,04 pour ceux de la troisième qualité. On choisit au hasard un mécanisme. Quelle est la probabilité pour qu'il ne soit pas défectueux ? Rép. 0,98.
9. On sait que par suite des erreurs commises lors de la préparation du tir, le centre de dispersion des projectiles peut, lors du premier tir, se trouver en portée en l'un de cinq points. Les probabilités pour que ce centre se trouve en ces points sont respectivement $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}2$, $p_5 = 0{,}1$. On sait également que si ce centre est au premier point, la probabilité d'atteindre la cible en portée sera $\overline{p_1} = 0{,}15$, et pour les autres points respectivement $\overline{p_2} = 0{,}25$, $\overline{p_3} = 0{,}60$, $\overline{p_4} = 0{,}25$, $\overline{p_5} = 0{,}15$.

   Après avoir réalisé la visée on a effectué un tir au cours duquel on a manqué la cible. Déterminer la probabilité pour que le tir ait été effectué pour une visée correspondant à chacun de ces points, autrement dit, déterminer la probabilité des causes relatives aux diverses erreurs sur la position du centre de dispersion après réalisation de l'épreuve. Rép. 0,85 ; 0,75 ; 0,40 ; 0,75 ; 0,85.
10. On jette un dé cinq fois. Quelle est la probabilité d'amener deux fois le six et trois fois un point autre que le six ? Rép. $\frac{625}{3888}$.
11. Trouver l'espérance mathématique du nombre de points quand on jette un dé une seule fois ? Rép. 7/2.

12. Trouver la variance de la variable aléatoire x donnée par le tableau de distribution

x	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Rép. 1,05.

13. La probabilité de la réalisation d'un événement A au cours d'une épreuve est 0,4. On effectue 5 épreuves indépendantes. Evaluer la variance du nombre de réalisations de l'événement A. Rép. 1,2.

14. La probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est $p = 0{,}01$. Quelle est la probabilité pour que dans un lot de 10 pièces il y ait 0, 1, 2, 3 pièces défectueuses ? Rép. 0,9045 ; 0,0904 ; 0,0041 ; 0,0011.

15. La fonction de répartition d'une variable aléatoire x est donnée par la loi suivante

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

Trouver la densité de probabilité $f(x)$, $\mathrm{M}[x]$, $\mathrm{D}[x]$.

Rép. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \text{ si } x > 1. \end{cases}$ $\mathrm{M}[x] = \frac{1}{2}$, $\mathrm{D}[x] = \frac{1}{12}$;

16. La variable aléatoire x suit une loi normale d'espérance mathématique 30 et de variance 100. Trouver la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire appartienne à l'intervalle (10, 50). Rép. 0,954.

17. La variable aléatoire x suit une loi normale de variance $\sigma^2 = 0{,}16$. Trouver la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire diffère de son espérance mathématique de moins de 0,3. Rép. 0,5468.

18. Une variable aléatoire x suit une loi normale de centre de dispersion $a = 0{,}3$ et de mesure de précision $h = 2$. Trouver la probabilité pour que la valeur de x appartienne à l'intervalle (0,5; 2,0). Rép. 0,262.

19. L'erreur de fabrication d'une pièce de 20 cm de longueur est une variable aléatoire suivant la loi normale avec $\sigma = 0{,}2$ cm. Déterminer la probabilité pour que la longueur de la pièce fabriquée diffère de la valeur donnée de moins de 0,3 cm. Rép. 0,866.

20. Dans les conditions de l'exemple 19, déterminer l'erreur de fabrication d'une pièce, qui a une probabilité 0,95 de ne pas être dépassée. Rép. 0,392.

21. Une variable aléatoire x est distribuée suivant une loi normale de paramètres $\mathrm{M}[x] = 5$ et $\sigma = 2$. Quelle est la probabilité pour que la valeur de la variable aléatoire appartienne à l'intervalle (1, 10). Faire un dessin. Rép. 0,971.

22. La longueur d'une pièce fabriquée par une machine-outil est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre $\mathrm{M}[x] = 15$, $\sigma = 0{,}2$. Trouver la probabilité du rebut si les dimensions admissibles de la pièce doivent être $15 \pm 0{,}3$. Quelle précision de longueur de la pièce fabriquée peut-on garantir avec une probabilité 0,97 ? Faire un dessin.

23. En mesurant une certaine grandeur on a obtenu la série statistique suivante :

x	1	2	3	4
fréquence	20	15	10	5

Déterminer la valeur moyenne et la variance empiriques. Rép. 2 ; 1.

24. Les résultats des mesures sont donnés dans le tableau :

x	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
fréquence	4	18	33	35	9	1

Déterminer la valeur moyenne $\bar{a}$ et la variance $\overline{\sigma^2}$ empiriques. Rép. 0,226 ; 0,004.

25. La probabilité de rebut au cours de la fabrication des pièces est $p = 0{,}02$. Quelle est la probabilité pour que dans un lot de 400 pièces le nombre de pièces défectueuses soit compris entre 7 et 10 ?. Rép. 0,414.

26. La probabilité de rebut au cours de la fabrication de certaines pièces est $p = 0{,}02$. Quelle est la probabilité pour que dans 1000 pièces prélevées au hasard le nombre de pièces défectueuses n'excède pas 25 ? Rép. 0,87.

Chapitre XXI

MATRICES. ÉCRITURE MATRICIELLE DES SYSTÈMES ET RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

§ 1. Transformations linéaires. Matrice

Considérons deux plans P et Q. Soient donnés dans le plan P un système de coordonnées rectangulaires x_1Ox_2 et dans le plan Q un système de coordonnées y_1Oy_2.

Les plans P et Q peuvent coïncider, les systèmes de coordonnées également. Considérons le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

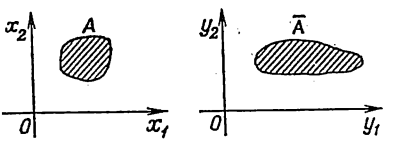


Fig. 448

En vertu des égalités (1), à chaque point $M(x_1, x_2)$ du plan (x_1Ox_2) correspond un point $\overline{M}(y_1, y_2)$ du plan (y_1Oy_2).

On dit alors que les équations (1) sont des *transformations linéaires* des coordonnées. Ces équations appliquent le plan (x_1Ox_2) dans le plan (y_1Oy_2) (pas nécessairement sur tout le plan). Les équations (1) étant linéaires, l'application est dite *application linéaire*.

Si nous considérons dans le plan (x_1Ox_2) un certain domaine A, les égalités (1) définiront un ensemble de points $\overline{A}$ du plan (y_1Oy_2) (fig. 448).

R e m a r q u e. Notons que l'on peut considérer également les applications non linéaires

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2), \quad y_2 = \psi(x_1, x_2).$$

Nous nous bornerons ici à l'étude des applications linéaires.

L'application (1) est entièrement déterminée par les coefficients $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

Le tableau rectangulaire formé à l'aide de ces coefficients écrits sous la forme

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est appelé la *matrice* de l'application (1). Les symboles $\| \ \|$ ou ( ) sont les symboles d'une matrice.

On désigne également les matrices par une seule lettre, par exemple A ou $\| A \|$,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Le déterminant formé avec les éléments de cette matrice (nous le noterons $\Delta(A)$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

est appelé *déterminant de la matrice.*

Exemple 1 L'application

$$y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha,$$
$$y_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

est une *rotation d'angle* α. Cette application fait correspondre à chaque point M de coordonnées polaires (ρ, θ) un point $\overline{M}$ de coordonnées polaires $(\rho, \theta + \alpha)$ si les systèmes de coordonnées (x_1Ox_2) et (y_1Oy_2) coïncident (fig. 449).

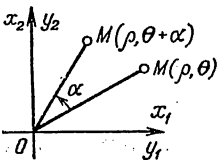


Fig. 449

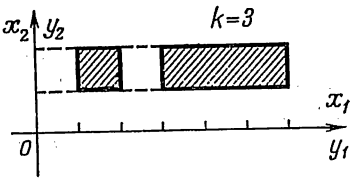


Fig. 450

La matrice de cette application est

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

Exemple 2. L'application

$$y_1 = kx_1,$$
$$y_2 = x_2$$

est une *dilatation suivant l'axe* Ox_1 caractérisée par un coefficient de dilatation k (fig. 450).

La matrice de cette application est

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Exemple 3. L'application

$$y_1 = kx_1,$$
$$y_2 = kx_2$$

est une *dilatation* tant suivant l'axe Ox_1, que suivant l'axe Ox_2 caractérisée par un coefficient de dilatation égal à k (fig. 451).

La matrice de cette application est

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix}.$$

Exemple 4. La transformation

$$y_1 = -x_1,$$
$$y_2 = x_2$$

est appelée *transformation de symétrie* par rapport à l'axe Ox_2 (fig. 452).

La matrice de cette transformation est

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

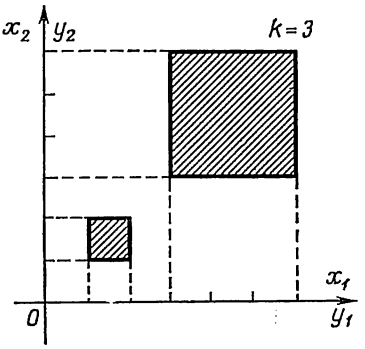


Fig. 451

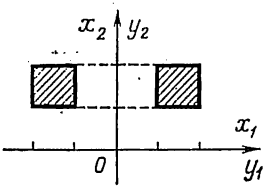


Fig. 452

Exemple 5. La transformation

$$y_1 = x_1 + \lambda x_2,$$
$$y_2 = x_2$$

est appelée *translation dans la direction de l'axe* Ox_2 (fig. 453). La matrice de cette transformation est

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

On peut également considérer une transformation linéaire pour un nombre quelconque de variables.

Ainsi, la transformation

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

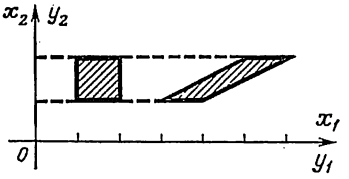


Fig. 453

est une application de l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, x_3) dans l'espace à trois dimensions (y_1, y_2, y_3). La matrice de cette trans-

formation est

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

On peut considérer les transformations linéaires à matrice non carrée, c'est-à-dire une matrice pour laquelle le nombre de lignes n'est pas égal au nombre de colonnes. Ainsi, la transformation

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

est une application du plan x_1Ox_2 sur un ensemble de points de l'espace (y_1, y_2, y_3).

La matrice de cette transformation est

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

On considère également des matrices comportant un nombre arbitraire de lignes et de colonnes. Les matrices sont utilisées non seulement pour les transformations linéaires, mais aussi à d'autres fins. Cela fait que la matrice est une notion mathématique indépendante analogue à la notion de déterminant. Nous formulons dans ce qui suit quelques définitions liées à la notion de matrice.

§ 2. Définitions générales liées à la notion de matrice

D é f i n i t i o n 1. On appelle *matrice* un tableau rectangulaire formé de mn nombres, formé de m lignes et de n colonnes

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

On emploie aussi la notation plus succincte:

$$A = \| a_{ij} \| \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

où a_{ij} sont les éléments de la matrice.

Si le nombre des lignes est égal à celui des colonnes $m = n$, la matrice est dite *carrée* :

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Définition 2. Le déterminant formé à partir des éléments d'une matrice carrée est appelé *déterminant de la matrice*; nous le noterons $\Delta(A)$:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Notons qu'une matrice non carrée ne possède pas de déterminant.

Définition 3. La matrice A^* est dite la *transposée* de la matrice A si les colonnes de la matrice A sont les lignes de la matrice A^*.

Exemple. Soit

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

La matrice transposée A^* sera

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

Définition 4. La matrice carrée A est dite *symétrique par rapport à la diagonale principale* si $a_{ij} = a_{ji}$. Il est évident qu'une matrice symétrique coïncide avec sa transposée.

Définition 5. La matrice carrée dont tous les éléments non situés sur la diagonale principale sont nuls est appelée *matrice diagonale*. Si les éléments d'une matrice diagonale située sur la diagonale principale sont égaux à l'unité, la matrice est dite *matrice unité*. Nous la désignerons par la lettre E :

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Définition 6. On considère les matrices formées d'une seule colonne ou d'une seule ligne :

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{Vmatrix}, \quad Y = \| y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_m \|. \tag{6}$$

La première est appelée *matrice-colonne*, la seconde *matrice-ligne* (on dit aussi matrice uni-colonne et matrice uni-ligne).

Définition 7. Deux matrices sont dites *égales* si elles ont un nombre identique de lignes et de colonnes et si les éléments correspondants sont tous égaux, autrement dit,

$$A = B \tag{7}$$

ou

$$\| a_{ij} \| = \| b_{ij} \| \tag{8}$$

si

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Il est parfois commode d'identifier une matrice-colonne avec un vecteur dans un espace de dimensions correspondantes où les éléments de la matrice sont les projections de ce vecteur sur les axes de coordonnées correspondants. Nous pouvons ainsi écrire

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} + x_3 \boldsymbol{k}. \tag{10}$$

Il est parfois commode d'identifier également une matrice-ligne à un vecteur.

§ 3. Transformation inverse

Il découle des équations (1) du § 1

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

que l'application du plan x_1Ox_2 dans le plan y_1Oy_2 est *univoque*, car à chaque point du plan x_1Ox_2 correspond un seul point du plan y_1Oy_2.

Si le déterminant de la matrice est différent de zéro

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } a_{11}a_{21}-a_{21}a_{12}\neq 0, \tag{2}$$

on sait que le système d'équations (1) peut être résolu par rapport à x_1 et x_2 de façon unique :

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

ou sous une forme plus explicite

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{a_{22}}{\Delta}y_1+\frac{-a_{12}}{\Delta}y_2, \\ x_2&=\frac{-a_{21}}{\Delta}y_1+\frac{a_{11}}{\Delta}y_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

A chaque point $M(y_1, y_2)$ du plan y_1Oy_2 correspond un point déterminé $M(x_1, x_2)$ du plan x_1Ox_2. Dans ce cas l'application (1) est dite biunivoque (*non dégénérée*). La transformation (3) des coordonnées (y_1, y_2) en coordonnées (x_1, x_2) est dite *inverse*. Dans ce cas l'application inverse est aussi linéaire. Notons qu'une application linéaire non dégénérée est dite *affine*. La matrice de la transformation inverse est une matrice que nous noterons A^{-1}.

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Si le déterminant de la matrice A est nul :

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0, \tag{5}$$

la transformation (1) est dite *dégénérée*. Elle ne sera pas biunivoque.

Démontrons ce fait. Considérons les deux cas qui peuvent se présenter :

1) Si $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, pour tous x_1 et x_2 on aura $y_1=0$, $y_2=0$. Dans ce cas à chaque point (x_1, x_2) du plan x_1Ox_2 on fait correspondre l'origine des coordonnées dans le plan y_1Oy_2.

2) Supposons que l'un au moins des coefficients de la transformation ne soit pas nul, par exemple que $a_{11}\neq 0$.

Multipliant la première des équations (1) par a_{21}, la seconde par a_{11} et retranchant les résultats, nous obtenons, compte tenu de l'égalité (5),

$$\begin{array}{r|l} a_{21} & y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ a_{11} & y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \\ \hline & a_{21}y_1-a_{11}y_2=0. \end{array} \tag{6}$$

Ainsi, pour n'importe quels x_1, x_2 nous obtenons pour les valeurs y_1, y_2 l'égalité (6), autrement dit, le point correspondant du plan x_1Ox_2 appartient à la droite (6) du plan y_1Oy_2. Il est évident que cette application n'est pas biunivoque, car à chaque point de la droite (6) du plan y_1Oy_2 correspond l'ensemble de points du plan x_1Ox_2 situés sur la droite $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$.

Dans les deux cas l'application n'est pas biunivoque.

Exemple 1. La transformation

$$y_1 = 2x_1 + x_2, \qquad y_2 = x_1 - x_2$$

est biunivoque, car le déterminant $\Delta(A)$ de la matrice de la transformation A est non nul:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

La transformation inverse sera

$$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2.$$

Conformément à la formule (4), la matrice de la transformation inverse sera

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Exemple 2. La transformation linéaire

$$y_1 = x_1 + 2x_2,$$

$$y_2 = 2x_1 + 4x_2$$

est dégénérée, car le déterminant de la matrice de transformation

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette transformation fait correspondre à tous les points du plan (x_1, x_2) les points de la droite $y_2 - 2y_1 = 0$ du plan (y_1, y_2).

§ 4. Opérations sur les matrices. Addition des matrices

Définition 1. On appelle *somme* de deux matrices $\| a_{ij} \|$ et $\| b_{ij} \|$ comportant un même nombre de lignes et un même nombre de colonnes la matrice $\| c_{ij} \|$ dont l'élément c_{ij} est égal à la somme $a_{ij} + b_{ij}$ des éléments correspondants des matrices $\| a_{ij} \|$ et $\| b_{ij} \|$, autrement dit,

$$\| a_{ij} \| + \| b_{ij} \| = \| c_{ij} \|, \tag{1}$$

si

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Exemple 1.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{Vmatrix}.$$

On définit de la même manière la *différence* de deux matrices.

Le bien-fondé de cette définition de la somme de deux matrices découle, en particulier, de la représentation d'un vecteur sous forme d'une matrice-colonne.

Produit d'une matrice par un nombre. Pour multiplier une matrice par un nombre λ, il faut multiplier chaque élément de la matrice par ce nombre

$$\lambda \| a_{ij} \| = \| \lambda a_{ij} \|. \tag{3}$$

Si λ est un nombre entier, la formule (3) découle de la règle d'addition des matrices.

Exemple 2.

$$\lambda \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Produit de deux matrices. Soit

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

une transformation linéaire du plan x_1Ox_2 sur le plan y_1Oy_2 dont la matrice de transformation est

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Soit encore une transformation linéaire du plan y_1Oy_2 sur le plan z_1Oz_2:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dont la matrice de transformation est

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

On demande de déterminer la matrice de la transformation permettant de passer directement du plan x_1Ox_2 au plan z_1Oz_2. Portant l'expression (4) dans l'égalité (6), nous obtenons:

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \\ z_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\,x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\,x_2, \\ z_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\,x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\,x_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

La matrice de la transformation obtenue sera

$$C = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

ou plus simplement

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

La matrice (9) est appelée le *produit* des matrices (7) et (5) et l'on écrit

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

ou plus simplement

$$B \cdot A = C. \tag{12}$$

Formulons maintenant la règle permettant d'effectuer la multiplication de deux matrices B et A dont la première a m lignes et k colonnes, et la seconde k lignes et n colonnes.

Cette règle peut être schématiquement illustrée par l'égalité :

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \dots & c_{ij} & \dots & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{m1} & \dots & \dots & c_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

L'élément c_{ij} de la matrice C représentant le produit de B par A est égal à la somme des produits des éléments de la i-ième ligne de la matrice B par les éléments correspondants de la j-ième colonne de la matrice A, autrement dit,

$$c_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k} b_{i\lambda} a_{\lambda j} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n).$$

Exemple 3. Soit

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

alors

$$1)\ BA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$2)\ AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Dans cet exemple nous remarquons que

$$BA \neq AB.$$

Nous sommes parvenus à la conclusion suivante. *Le produit des matrices n'est pas commutatif.*

Exemple 4. Soient données les matrices

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Calculer AB et BA.

Solution. Nous trouvons en vertu de la formule (13):

$$AB = \begin{Vmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 & 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$BA = \begin{Vmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 & 0\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Exemple 5. Trouver le produit des matrices:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{Vmatrix}$$

On peut se convaincre en vérifiant directement la validité des relations suivantes entre les matrices (k est un nombre, A, B, C sont des matrices)

$$(kA)\cdot B = A\cdot(kB), \tag{14}$$

$$(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C, \tag{15}$$

$$C\cdot(A + B) = CA + CB, \tag{16}$$

$$A\,(BC) = (AB)\,C. \tag{17}$$

Il découle de la règle de multiplication d'une matrice A par un nombre k et de la règle permettant de sortir le facteur commun des éléments des colonnes d'un déterminant que pour une matrice du n-ième ordre

$$\Delta\,(kA) = k^n\Delta\,(A). \tag{18}$$

Etant donné qu'en multipliant deux matrices carrées A et B on obtient une matrice carrée dont les éléments sont formés d'après la règle du produit des déterminants, il est évident que l'on a l'égalité

$$\Delta\,(AB) = \Delta\,(A)\cdot\Delta\,(B). \tag{19}$$

Multiplication par une matrice unité. Comme nous l'avons dit plus haut, on appelle matrice unité une matrice dont les éléments de la diagonale principale sont égaux à l'unité et tous les autres éléments sont nuls.

Ainsi, la matrice unité du deuxième ordre:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

En vertu de la règle de multiplication des matrices nous obtenons:

$$AE = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

autrement dit,

$$AE = A, \tag{21}$$

et également

$$EA = A. \tag{22}$$

On vérifie aisément que le produit d'une matrice carrée de n'importe quel ordre par la matrice unité d'ordre correspondant est égal à la matrice initiale, autrement dit, on a les égalités (21) et (22). La matrice unité joue ainsi dans le produit matriciel le rôle de l'unité, c'est d'ailleurs pour cela qu'elle est appelée matrice unité.

A la matrice unité (2) correspond la transformation

$$y_1 = x_1,$$
$$y_2 = x_2.$$

Cette transformation est dite transformation *identique*. Inversement, à une transformation identique correspond une matrice unité. On définit de manière analogue la transformation identique pour un nombre quelconque de variables.

§ 5. Transformation d'un vecteur en un autre vecteur à l'aide d'une matrice

Soit donné un vecteur

$$X = x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

que nous écrirons sous forme de matrice-colonne

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Effectuons une transformation des projections de ce vecteur à l'aide de la matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nous obtenons un nouveau vecteur

$$Y = y_1 i + y_2 j + y_3 k$$

que l'on peut écrire sous forme de matrice-colonne

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Utilisant la définition du produit des matrices, on peut mettre cette opération de transformation sous la forme

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

autrement dit,

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{6}$$

Le produit d'une matrice carrée par une matrice-colonne donne une matrice-colonne de même hauteur.

Il est évident que la transformation du vecteur à trois dimensions $\boldsymbol{X}$ en vecteur $\boldsymbol{Y}$ est simplement une autre manière de formuler la transformation de l'espace à trois dimensions en un autre espace à trois dimensions.

Notons que le système d'égalités (3) découle de l'égalité matricielle (4) quand on égalise les éléments des matrices situées à gauche et à droite.

L'égalité (4) donne la transformation du vecteur $\boldsymbol{X}$ en un vecteur $\boldsymbol{Y}$ à l'aide de la matrice $\boldsymbol{A}$.

Tous les raisonnements que nous avons donnés pour les vecteurs dans l'espace à trois dimensions peuvent être appliqués aux transformations des vecteurs dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

§ 6. Matrice inverse

Soit donné un vecteur $\boldsymbol{X}$ sur lequel on a effectué une transformation à l'aide d'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$, de sorte que l'on a obtenu un vecteur $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{1}$$

Supposons que le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ soit non nul $\Delta(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Il existe alors une transformation inverse du vecteur $\boldsymbol{Y}$ en $\boldsymbol{X}$. On détermine cette transformation en résolvant le système d'équations (3) du § 5 par rapport à x_1, x_2, x_3. La matrice de la transformation inverse est appelée *matrice inverse* de $\boldsymbol{A}$ et notée $\boldsymbol{A}^{-1}$. Nous pouvons ainsi écrire

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}. \tag{2}$$

Ici $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ sont des matrices-colonnes, $\boldsymbol{A}^{-1}$ une matrice carrée. Substituant dans le second membre de l'égalité (2) $\boldsymbol{Y}$ donné par le second membre de l'égalité (1), nous obtenons:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{3}$$

Nous avons donc effectué successivement sur le vecteur X une transformation avec la matrice A, puis une transformation avec la matrice A^{-1}, autrement dit, nous avons effectué une transformation avec la matrice $(A^{-1}A)$. Nous avons alors obtenu une transformation d'identité. Par conséquent, la matrice $A^{-1}A$ est une matrice unité

$$A^{-1}A = E. \tag{4}$$

L'égalité (3) est de la forme

$$X = EX. \tag{5}$$

Théorème 1. *Si A^{-1} est la matrice inverse de la matrice A, alors A est la matrice inverse de la matrice A^{-1}, autrement dit, on a l'égalité*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{6}$$

Démonstration. Appliquons aux deux membres de l'égalité (3) une transformation à l'aide de la matrice A :

$$AX = A(A^{-1}A)X.$$

Utilisant la propriété d'associativité du produit des matrices, nous pouvons mettre cette égalité sous la forme :

$$AX = (AA^{-1})AX.$$

Il en découle que

$$AA^{-1} = E. \tag{7}$$

Le théorème est démontré.

Il découle des égalités (4) et (7) que les matrices A et A^{-1} sont réciproquement inverses, et aussi que

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{8}$$

Il vient en effet de l'égalité (7) que

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E.$$

Comparant cette dernière égalité avec l'égalité (4), nous obtenons l'égalité (8).

§ 7. Calcul de la matrice inverse

Soit donnée une matrice non singulière (régulière)

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\Delta = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Démontrons que la matrice inverse A^{-1} sera la matrice

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

où A_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} du déterminant $\Delta = \Delta(A)$.

Calculons la matrice C égale au produit AA^{-1}:

$$C=AA^{-1}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{A} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

En effet, en vertu de la règle définissant le produit de deux matrices, les éléments diagonaux de C sont la somme des produits des éléments d'une ligne du déterminant Δ par les cofacteurs correspondants divisée par Δ, autrement dit, sont égaux à l'unité. Pour l'élément c_{11}, par exemple, on a:

$$c_{11}=a_{11}\frac{A_{11}}{\Delta}+a_{12}\frac{A_{12}}{\Delta}+a_{13}\frac{A_{13}}{\Delta}=\frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}}{\Delta}=1.$$

Chacun des termes non diagonaux est égal à la somme des produits des éléments d'une certaine ligne par les cofacteurs d'une autre ligne divisée par le déterminant Δ; par exemple, l'élément c_{23} est déterminé ainsi:

$$c_{23}=a_{21}\frac{A_{31}}{\Delta}+a_{22}\frac{A_{32}}{\Delta}+a_{23}\frac{A_{33}}{\Delta}=\frac{a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}}{\Delta}=\frac{0}{\Delta}=0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque. La matrice

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

est dite matrice *adjointe* de A. La matrice inverse A^{-1} s'exprime ainsi en fonction de $\tilde{A}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\tilde{A}. \tag{5}$$

La validité de cette égalité découle de l'égalité (3).

Exemple. Soit donnée la matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Calculer la matrice inverse A^{-1} et la matrice adjointe $\tilde{A}$.

Solution. Calculons le déterminant de la matrice A:

$$\Delta(A) = 5.$$

Calculons également les cofacteurs

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 5, & A_{12} = 0, & A_{13} = 0, \\ A_{21} = -4, & A_{22} = 2, & A_{23} = -1, \\ A_{31} = 2, & A_{32} = -1, & A_{33} = 3. \end{array}$$

Par conséquent, nous avons en vertu de la formule (3)

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{5}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}.$$

Nous trouvons la matrice adjointe d'après la formule (4)

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

§ 8. Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires et solutions d'un système d'équations linéaires

Nous conduirons les raisonnements pour le cas de l'espace à trois dimensions. Soit donné le système d'équations linéaires

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Considérons trois matrices

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

$$D = \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Nous pouvons alors, en utilisant la règle du produit des matrices, écrire le système (1) sous forme matricielle

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

En effet, dans cette égalité le premier membre représente le produit de deux matrices donnant une matrice-colonne dont les éléments sont définis par l'égalité (5). A droite nous avons aussi une matrice-colonne. Deux matrices sont égales si leurs éléments sont respectivement égaux. Egalant les éléments correspondants, nous obtenons le système d'équations (1). L'égalité matricielle (5) peut s'écrire sous une forme symbolique suivante:

$$AX = D. \tag{6}$$

Exemple. Ecrire sous forme matricielle le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Solution. Ecrivons séparément la matrice A du système, la matrice des solutions X et la matrice des seconds membres D:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

Le système d'équations linéaires peut alors être mis sous forme matricielle:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

§ 9. Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode matricielle

Supposons que le déterminant $\Delta(A)$ de la matrice A ne soit pas nul $\Delta(A) \neq 0$. Multiplions à gauche les deux membres de l'égalité (6) du § 8 par la matrice A^{-1} inverse de A, nous obtenons:

$$A^{-1}AX = A^{-1}D. \tag{1}$$

Or,

$$A^{-1}A = E, \quad EX = X,$$

de sorte qu'il découle de (1) que

$$X = A^{-1}D. \tag{2}$$

Cette dernière égalité peut, compte tenu de l'égalité (5) du § 7, s'écrire ainsi :

$$X = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \widetilde{A} D, \tag{3}$$

ou sous une forme explicite

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\Delta(A)} \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Effectuant la multiplication des matrices dans le second membre, nous aurons :

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\Delta(A)} \left\| \begin{matrix} d_1A_{11} + d_2A_{21} + d_3A_{31} \\ d_1A_{12} + d_2A_{22} + d_3A_{32} \\ d_1A_{13} + d_2A_{23} + d_3A_{33} \end{matrix} \right\|. \tag{5}$$

Egalant les éléments respectifs des matrices-colonnes à gauche et à droite, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{d_1A_{11} + d_2A_{21} + d_3A_{31}}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{d_1A_{12} + d_2A_{22} + d_3A_{32}}{\Delta}, \\ x_3 &= \frac{d_1A_{13} + d_2A_{23} + d_3A_{33}}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

La solution (6) peut s'écrire sous forme de déterminants :

$$\left. x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_2 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \right\} \tag{7}$$

Exemple 1. Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

par la méthode matricielle.

Solution. Calculons le déterminant de la matrice du système

$$\Delta(A) = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| = 5.$$

Déterminons la matrice inverse d'après la formule (3) du § 7 :

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}.$$

La matrice D est alors

$$D=\begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

La solution du système (2) sous forme matricielle s'écrira ainsi :

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1\cdot 5-\frac{4}{5}\cdot 9+\frac{2}{5}\cdot 8 \\ 0\cdot 5+\frac{2}{5}\cdot 9-\frac{1}{5}\cdot 8 \\ 0\cdot 5-\frac{1}{5}\cdot 9+\frac{3}{5}\cdot 8 \end{Vmatrix}.$$

Egalant les éléments respectifs des matrices-colonnes à gauche et à droite, nous obtenons :

$$x_1=1\cdot 5-\frac{4}{5}\cdot 9+\frac{2}{5}\cdot 8=1,$$

$$x_2=0\cdot 5+\frac{2}{5}\cdot 9-\frac{1}{5}\cdot 8=2,$$

$$x_3=0\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 9+\frac{3}{5}\cdot 8=3.$$

Exemple 2. Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=0, \\ 2x_1+x_2+x_3&=1, \\ x_1+3x_2+x_3&=2 \end{aligned}$$

par la méthode matricielle.

Solution. Calculons le déterminant de la matrice du système

$$\Delta(A)=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}=1\neq 0.$$

Trouvons également la matrice inverse

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Ecrivons la solution du système sous forme matricielle

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{matrix} \right\|.$$

Egalant les éléments correspondants des matrices-colonnes nous obtenons:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -7.$$

§ 10. Application orthogonale. Matrices orthogonales

Soient donnés dans l'espace à trois dimensions deux systèmes rectangulaires de coordonnées (x_1, x_2, x_3) et (x_1', x_2', x_3') possédant une origine commune O. Supposons que les coordonnées du point M sont respectivement (x_1, x_2, x_3) et (x_1', x_2', x_3') pour le premier et le second systèmes de coordonnées (on aurait pu ne pas exiger que les origines coïncident).

Désignons les vecteurs unitaires sur les axes de coordonnées par e_1, e_2, e_3 pour le premier système et e_1', e_2', e_3' pour le second. Les vecteurs e_1, e_2, e_3 sont les vecteurs de base dans le système (x_1, x_2, x_3) et les vecteurs e_1', e_2', e_3' les vecteurs de base dans le système (x_1', x_2', x_3').

Le vecteur $\overline{OM}$ peut alors, en utilisant le premier système de coordonnées, être mis sous la forme:

$$\overline{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3; \tag{1}$$

en utilisant le second système de coordonnées, on aura de même:

$$\overline{OM} = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3'. \tag{2}$$

Nous allons considérer une transformation du point arbitraire M de coordonnées x_1, x_2, x_3 en un point de coordonnées x_1', x_2', x_3'. On peut dire que nous allons considérer la transformation de l'espace (x_1, x_2, x_3) dans l'espace (x_1', x_2', x_3').

Cette transformation possède la propriété qu'un segment de longueur l se transforme en un segment de même longueur l. Un triangle se transforme donc en un triangle égal et, par conséquent, deux vecteurs issus d'un même point et formant entre eux un angle ψ, se transforment en deux vecteurs de même longueur formant entre eux le même angle ψ.

La transformation possédant cette propriété est dite *orthogonale*.

On peut dire que lors d'une transformation orthogonale il se produit une translation de tout l'espace considéré comme un corps solide ou bien une translation et une transformation de symétrie. Déterminons la matrice de cette transformation.

Exprimons les vecteurs unitaires e'_1, e'_2, e'_3 en fonction des vecteurs unitaires e_1, e_2, e_3:

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \alpha_{31}e_3, \\ e'_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{32}e_3, \\ e'_3 &= \alpha_{13}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{33}e_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ici nous avons

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11} = \cos(e_1, e'_1), \quad \alpha_{12} = \cos(e_1, e'_2), \quad \alpha_{13} = \cos(e_1, e'_3), \\ &\alpha_{21} = \cos(e_2, e'_1), \quad \alpha_{22} = \cos(e_2, e'_2), \quad \alpha_{23} = \cos(e_2, e'_3), \\ &\alpha_{31} = \cos(e_3, e'_1), \quad \alpha_{32} = \cos(e_3, e'_2), \quad \alpha_{33} = \cos(e_3, e'_3). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ecrivons les neuf cosinus directeurs sous forme de matrice

$$S = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Utilisant les relations (4), nous pouvons également écrire:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}e'_1 + \alpha_{12}e'_2 + \alpha_{13}e'_3, \\ e_2 &= \alpha_{21}e'_1 + \alpha_{22}e'_2 + \alpha_{23}e'_3, \\ e_3 &= \alpha_{31}e'_1 + \alpha_{32}e'_2 + \alpha_{33}e'_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Il est évident que la matrice

$$S^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

est la transposée de la matrice S. Comme e'_1, e'_2, e'_3 sont des vecteurs unitaires réciproquement perpendiculaires, leur produit scalaire est égal à ± 1. Par conséquent, nous avons,

$$(e'_1 e'_2 e'_3) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{8}$$

De manière analogue nous pouvons écrire

$$(e_1 e_2 e_3) = \Delta(S^*) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{9}$$

Calculons le produit des matrices

$$SS^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E. \tag{10}$$

En effet, si l'on désigne par c_{ij} les éléments de la matrice de produit nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1, \\ c_{22} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1, \\ c_{33} &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$c_{12} = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = (e_1' e_2') = 0.$$

Nous avons de même

$$c_{ij} = e_i' e_j' = 0 \text{ si } i \neq j \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Ainsi,

$$SS^* = E. \tag{13}$$

La matrice transposée S^* coïncide, par conséquent, avec la matrice inverse S^{-1} :

$$S^* = S^{-1}. \tag{14}$$

Une matrice vérifiant les conditions (13) ou (14), c'est-à-dire une matrice égale à la matrice inverse de sa transposée est dite *orthogonale*. Trouvons maintenant les formules de passage des coordonnées (x_1, x_2, x_3) aux coordonnées (x_1', x_2', x_3') et inversement. En vertu des formules (3) et (6) on peut exprimer les seconds membres des égalités (1) et (2) en fonction de la base (e_1, e_2, e_3), ainsi qu'en fonction de la base (e_1', e_2', e_3'). Cela fait qu'on peut écrire l'égalité

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3'. \tag{15}$$

Multipliant successivement tous les termes de l'égalité (15) par le vecteur e_1', puis par le vecteur e_2', puis par le vecteur e_3' et tenant compte du fait que

$$\left.\begin{aligned} e_i' e_j' &= 0 && \text{si } i \neq j, \\ e_i' e_j' &= 1 && \text{si } i = j, \\ e_i' e_j' &= \alpha_{ij}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \alpha_{31} x_3, \\ x_2' &= \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{32} x_3, \\ x_3' &= \alpha_{13} x_1 + \alpha_{23} x_2 + \alpha_{33} x_3. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Multipliant les termes de l'égalité (15) successivement par e_1, e_2, e_3 nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \alpha_{13} x_3', \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{23} x_3', \\ x_3 &= \alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \alpha_{33} x_3'. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

La matrice des transformations orthogonales (17) est ainsi la matrice S, et la matrice de la transformation inverse (18) la matrice S^*.

Nous avons ainsi démontré que, dans un système cartésien de coordonnées, *à une transformation orthogonale* correspond *une matrice orthogonale*. On peut démontrer que si les matrices des transformations directes et inverse (17) et (18) vérifient la relation (13) ou (14), c'est-à-dire sont orthogonales, la transformation sera elle aussi orthogonale.

Introduisons les matrices-colonnes

$$X' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Les systèmes (17) et (18) peuvent alors s'écrire:

$$X' = SX, \tag{20}$$

$$X = S^{-1}X'. \tag{21}$$

Si nous introduisons les transposées des matrices (19),

$$X'^* = \| x_1'x_2'x_3' \|, \quad X^* = \| x_1x_2x_3 \|, \tag{22}$$

nous pourrons écrire

$$X'^* = X^*S^{-1}, \quad X^* = X'^*S. \tag{23}$$

§ 11. Vecteur propre d'une transformation linéaire

Définition 1. Soit donné un vecteur X:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

où $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq \theta$.

Si après la transformation du vecteur X à l'aide de la matrice A (cf. (2), § 5) nous obtenons un vecteur Y:

$$Y = AX, \tag{2}$$

parallèle au vecteur X :

$$Y = \lambda X, \tag{3}$$

où λ est un nombre, le vecteur X est appelé *vecteur propre de la matrice* A ou *vecteur propre de la transformation linéaire donnée*; le nombre λ est appelé *valeur propre*.

Déterminons le vecteur propre

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

de la transformation linéaire ou de la matrice donnée A. Pour que le vecteur X soit un vecteur propre de la matrice A, il faut que soient vérifiées les égalités (2) et (3). Egalant les seconds membres de ces égalités nous obtenons:

$$AX = \lambda X \tag{4}$$

ou

$$AX = \lambda EX,$$

autrement dit,

$$(A - \lambda E)\, X = 0. \tag{5}$$

Il découle de cette égalité que le vecteur X est déterminé à une constante près. Sous forme explicite l'égalité (4) s'écrit:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

et l'égalité (5)

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \quad a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + \quad a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nous obtenons un système d'équations linéaires homogènes pour déterminer les coordonnées x_1, x_2, x_3 du vecteur X. Pour que le système (7) possède une solution non nulle, il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

ou

$$\Delta\,(A - \lambda E) = 0. \tag{9}$$

C'est une équation du troisième degré en λ. On l'appelle *équation caractéristique de la matrice* A. Elle permet de calculer les valeurs propres λ.

Considérons le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes. Désignons-les par λ_1, λ_2, λ_3.

A chaque valeur propre λ correspond un vecteur propre dont les composantes sont déterminées à l'aide des coordonnées du système (7) pour la valeur correspondante de λ. Désignons les vecteurs propres par τ_1, τ_2, τ_3. On peut démontrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants, autrement dit, qu'aucun d'eux ne s'exprime en fonction des autres. On peut, par conséquent, exprimer n'importe quel vecteur en fonction des vecteurs τ_1, τ_2, τ_3, c'est-à-dire les adopter en tant que vecteurs de base.

Notons, sans en donner la démonstration, que toutes les racines de l'équation caractéristique d'une matrice symétrique sont réelles.

Exemple 1. Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique et trouvons les valeurs propres

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ c'est-à-dire } \lambda^2-4\lambda-5=0,$$

$$\lambda_1=-1, \quad \lambda_2=5.$$

Trouvons le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1=-1$ à partir du système correspondant d'équations (7)

$$\begin{aligned} (1-\lambda_1)\,x_1+ \qquad\quad x_2&=0, \\ 8x_1+(3-\lambda_1)\,x_2&=0, \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} 2x_1+\ x_2&=0, \\ 8x_1+4x_2&=0. \end{aligned}$$

Résolvant ce système nous trouvons $x_1 = m_1$, $x_2 = -2m$, où m est un nombre arbitraire.

Le vecteur propre sera

$$\tau_1=mi-2mj.$$

Pour la valeur propre $\lambda_2 = 5$ écrivons le système d'équations

$$\begin{aligned} -4x_1 + \ x_2 &= 0, \\ 8x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Le vecteur propre sera

$$\tau_2=mi+4mj.$$

Exemple 2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ autrement dit, } -\lambda^3+18\lambda^2-99\lambda+162=0.$$

Les racines de cette équation sont: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Pour $\lambda_1 = 3$ nous déterminons le vecteur propre du système d'équations

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 \qquad &= 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Posant $x_1 = m$, nous obtenons $x_2 = 2m$, $x_3 = 2m$. Le vecteur propre est alors

$$\tau_1 = m\boldsymbol{i} + 2m\boldsymbol{j} + 2m\boldsymbol{k}.$$

Nous trouvons de même:

$$\tau_2 = m\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{j} - m\boldsymbol{k},$$

$$\tau_3 = -m\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{k}.$$

§ 12. Matrice d'une transformation linéaire pour laquelle les vecteurs de base sont les vecteurs propres

Déterminons maintenant la matrice de la transformation linéaire, quand la base est constituée par les vecteurs propres τ_1, τ_2, τ_3. Pour cette transformation on doit avoir les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1^* &= \lambda_1\tau_1, \\ \tau_2^* &= \lambda_2\tau_2, \\ \tau_3^* &= \lambda_3\tau_3, \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

où τ_1^*, τ_2^*, τ_3^* sont les images des vecteurs τ_1, τ_2, τ_3.

Supposons que la matrice de la transformation soit

$$A' = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Déterminons les éléments de cette matrice. Dans la base τ_1, τ_2, τ_3 on peut écrire:

$$\tau_1 = 1\cdot\tau_1 + 0\cdot\tau_2 + 0\cdot\tau_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Comme après la transformation à l'aide de la matrice A' le vecteur τ_1 se transforme en vecteur $\tau_1^* = \lambda_1\tau_1$:

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1 + 0\cdot\tau_2 + 0\cdot\tau_3,$$

nous pouvons écrire

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1 = A'\tau_1.$$

Par conséquent, nous avons

$$\left\|\begin{matrix}\lambda_1\\0\\0\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23}\\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\| \tag{3}$$

ou sous forme d'un système d'équations

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= a'_{11}\cdot 1 + a'_{12}\cdot 0 + a'_{13}\cdot 0,\\ 0 &= a'_{21}\cdot 1 + a'_{22}\cdot 0 + a'_{23}\cdot 0,\\ 0 &= a'_{31}\cdot 1 + a'_{32}\cdot 0 + a'_{33}\cdot 0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nous trouvons de ce système

$$a'_{11} = \lambda_1,\ a'_{21} = 0,\ a'_{31} = 0.$$

De la relation

$$\tau_2^* = \lambda_2\tau_2,\quad \tau_3^* = \lambda_3\tau_3,$$

nous tirons de même :

$$\begin{aligned}&a'_{12} = 0, \quad a'_{22} = \lambda_2, \quad a'_{32} = 0,\\ &a'_{13} = 0, \quad a'_{23} = 0, \quad a'_{33} = \lambda_3.\end{aligned}$$

La matrice de la transformation est ainsi de la forme

$$A' = \left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

La transformation linéaire sera

$$\left.\begin{aligned}y'_1 &= \lambda_1 x'_1,\\ y'_2 &= \qquad \lambda_2 x'_2,\\ y'_3 &= \qquad\qquad \lambda_3 x'_3.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^*$, la transformation linéaire sera de la forme

$$\begin{aligned}y'_1 &= \lambda^* x'_1,\\ y'_2 &= \lambda^* x'_2,\\ y'_3 &= \lambda^* x'_3.\end{aligned}$$

Une transformation de ce genre est dite *transformation de similitude* de coefficient λ^*. Par cette transformation chaque vecteur de l'espace est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ^*.

§ 13. Transformation de la matrice d'une transformation linéaire lors du passage d'une base à une autre

Soit X un vecteur arbitraire :

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \tag{1}$$

donné dans une base (e_1, e_2, e_3). A l'aide de la matrice A le vecteur X se transforme en vecteur Y :

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \tag{2}$$

$$Y = AX. \tag{3}$$

Introduisons dans l'espace considéré une nouvelle base (e'_1, e'_2, e'_3) liée avec l'ancienne base par les formules de passage

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= b_{11} e_1 + b_{21} e_2 + b_{31} e_3, \\ e'_2 &= b_{12} e_1 + b_{22} e_2 + b_{32} e_3, \\ e'_3 &= b_{13} e_1 + b_{23} e_2 + b_{33} e_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Supposons que dans la nouvelle base le vecteur X s'écrit ainsi :

$$X' = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 = \begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Nous pouvons écrire l'égalité

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3, \tag{6}$$

où dans le second membre nous avons substitué l'expression (4). Egalant les coefficients des vecteurs e_1, e_2, e_3 à droite et à gauche, nous obtenons l'égalité :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11} x'_1 + b_{12} x'_2 + b_{13} x'_3, \\ x_2 &= b_{21} x'_1 + b_{22} x'_2 + b_{23} x'_3, \\ x_3 &= b_{31} x'_1 + b_{32} x'_2 + b_{33} x'_3, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ou encore plus simplement

$$X = BX', \tag{8}$$

avec

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Cette matrice est régulière, possède une matrice inverse B^{-1}, étant donné que le système (7) possède une solution déterminée par rapport à x_1', x_2', x_3'. Si dans la nouvelle base nous écrivons le vecteur Y :

$$Y' = y_1'e_1' + y_2'e_2' + y_3'e_3',$$

nous aurons évidemment l'égalité

$$Y = BY'. \tag{10}$$

Portant les expressions (8) et (10) dans (3), nous obtenons :

$$BY' = ABX'. \tag{11}$$

Multipliant les deux parties de l'égalité par B^{-1}, nous trouvons

$$Y' = B^{-1}ABX'. \tag{12}$$

Par conséquent, la matrice A' de transformation sera dans la nouvelle base

$$A' = B^{-1}AB. \tag{13}$$

Exemple. Supposons qu'à l'aide de la matrice A :

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

on effectue une transformation du vecteur dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer la matrice de transformation A' dans la base $(e_1'. e_2', e_3')$, si

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,$$
$$e_2' = 2e_1 + e_2 + 3e_3,$$
$$e_3' = e_1 + e_2 + e_3.$$

Solution. La matrice B a pour expression (cf. formules (4) et (9))

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Trouvons la matrice inverse ($\Delta(B) = 1$)

$$B^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Nous trouvons ensuite:

$$B^{-1}A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{Vmatrix}.$$

A l'aide de la formule (13) nous obtenons en définitive:

$$A' = B^{-1}AB = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Démontrons maintenant le théorème suivant.

Théorème 1. *Le polynôme caractéristique* (le premier membre de l'équation (8) du § 11) *est indépendant du choix de la base pour une transformation linéaire donnée.*

Démonstration. Ecrivons deux égalités matricielles.

$$A' = B^{-1}AB,$$

$$E = B^{-1}EB,$$

où A et A' sont les matrices correspondant aux différentes bases pour une même transformation linéaire, B est la matrice de passage des nouvelles coordonnées aux anciennes, E est la matrice unité.

Nous obtenons ainsi en vertu des deux égalités précédentes:

$$A' - \lambda E = B^{-1}(A - \lambda E)B.$$

Passant des matrices aux déterminants et utilisant la règle de multiplication des matrices et des déterminants, nous trouvons:

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(B^{-1}(A - \lambda E)B) = \Delta(B^{-1}) \cdot \Delta(A - \lambda E)\Delta(B).$$

Or,

$$\Delta(B^{-1})\Delta(B) = \Delta(B^{-1}B) = \Delta(E) = 1.$$

Par conséquent, nous obtenons,

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(A - \lambda E).$$

Dans cette égalité nous avons à gauche et à droite les polynômes caractéristiques des matrices de la transformation. Le théorème est ainsi démontré.

§ 14. Formes quadratiques et leur transformation

Définition 1. On appelle *forme quadratique* de plusieurs variables un polynôme homogène du second degré de ces variables.

La forme quadratique des trois variables x_1, x_2, x_3 est de la forme:

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3, \qquad (1)$$

où a_{ij} sont des nombres donnés; le coefficient 2 est choisi pour simplifier les formules obtenues par la suite.

L'égalité (1) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} F = x_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ + x_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3 (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3), \end{aligned} \tag{2}$$

où a_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ sont des nombres donnés, et

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}. \tag{3}$$

La matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

est appelée *matrice de la forme quadratique* (1). C'est une matrice symétrique.

Nous estimerons que (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées du point de l'espace ou les coordonnées du vecteur dans la base orthogonale (e_1, e_2, e_3), où e_1, e_2, e_3 sont les vecteurs unitaires.

Considérons une transformation linéaire dans la base (e_1, e_2, e_3):

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La matrice de cette transformation coïncide avec la matrice de la forme quadratique.

Déterminons ensuite deux vecteurs

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

$$X' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Ecrivons la transformation (5) sous la forme

$$X' = AX. \tag{8}$$

On peut alors mettre la forme quadratique sous forme du produit scalaire de ces vecteurs

$$F = X \cdot AX. \tag{9}$$

Soient e_1', e_2', e_3' les vecteurs propres orthogonaux de la transformation (8) correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3. On peut démontrer que si la matrice est symétrique, il existe une base orthogonale composée des vecteurs propres de la matrice A.

Effectuons la transformation (8) dans la base (e_1', e_2', e_3'). La matrice de la transformation sera alors dans cette base la matrice diagonale (cf. § 12):

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

On peut démontrer qu'en appliquant cette transformation à la forme quadratique (1), on peut ramener cette dernière à la forme

$$F = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2. \tag{11}$$

Les directions des vecteurs propres e_1', e_2', e_3' sont dites *directions principales* de la forme quadratique.

§ 15. Rang d'une matrice. Existence des solutions d'un système d'équations linéaires

Définition 1. On appelle *mineur* d'une matrice A le déterminant formé des éléments restants de la matrice quand on supprime quelques lignes et quelques colonnes dans cette matrice.

Exemple 1. Soit donnée la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}.$$

On obtient les mineurs du troisième ordre de cette matrice après avoir supprimé une colonne et remplacé le symbole $\| \ \|$ de la matrice par le symbole $| \ |$ du déterminant. Il y en a quatre.

On obtient les mineurs du deuxième ordre en supprimant deux colonnes et une ligne. Il y en a 18. De même il y a 12 mineurs du premier ordre.

Définition 2. On appelle *rang* d'une matrice A l'ordre maximal du mineur non nul de la matrice A.

Exemple 2. On vérifie aisément que le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

est 2.

Exemple 3. Le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$$

est 1.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, le rang k de cette matrice vérifie la relation $k \leqslant n$. Comme nous l'avons noté plus haut, si $k = n$, la matrice est dite *régulière*, si $k < n$ la matrice est dite *singulière*.

Par exemple, la matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

est régulière, puisque $\Delta(A) = 1 \neq 0$; la matrice de l'exemple 2 est singulière, car $n = 3$ mais $k = 2$.

La notion de rang d'une matrice est largement utilisée dans la théorie des systèmes d'équations linéaires. On a ainsi le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit donné un système d'équations linéaires*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Introduisons la matrice du système

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

et la matrice élargie

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

La solution du système (1) *existe, si le rang de la matrice* A *est égal au rang de la matrice* B. *Le système n'a pas de solution, si le rang de la matrice* A *est inférieur au rang de la matrice* B. *Si le rang des matrices* A *et* B *est* 3, *le système possède une solution unique. Si le rang des matrices* A *et* B *est* 2, *le système possède une infinité de solutions, et dans ce cas deux des inconnues s'expriment en fonction de la troisième, qui prend une valeur arbitraire.*

Si le rang des matrices A *et* B *est* 1, *le système possède une infinité de solutions, et dans ce cas deux des inconnues prennent une valeur*

arbitraire, et la troisième s'exprime en fonction de ces deux autres.

On établit aisément la validité de ce théorème en analysant les solutions du système d'équations. Ce théorème est valable pour les systèmes à un nombre quelconque d'équations.

§ 16. Dérivation et intégration des matrices

Soit donnée une matrice $\| a_{ij}(t) \|$ dont les termes $a_{ij}(t)$ sont fonction d'une certaine variable t:

$$\| a_{ij}(t) \| = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & & a_{mn}(t) \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

nous pouvons encore écrire simplement:

$$\| a(t) \| = \| a_{ij}(t) \| \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n). \tag{2}$$

Supposons que les éléments de cette matrice possèdent des dérivées

$$\frac{da_{11}(t)}{dt}, \dots, \frac{da_{mn}(t)}{dt}.$$

D é f i n i t i o n 1. On appelle *dérivée d'une matrice* $\| a(t) \|$ la matrice, notée $\frac{d}{dt} \| a(t) \|$, dont les éléments sont les dérivées des éléments de la matrice $\| a(t) \|$, autrement dit,

$$\frac{d}{dt} \| a(t) \| = \begin{Vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Notons que cette définition de la dérivée d'une matrice s'obtient d'une manière fort naturelle si outre les opérations déjà introduites de soustraction des matrices et de multiplication d'une matrice par un nombre (cf. § 4) on définit l'opération de passage à la limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \| a_{ij}(t + \Delta t) \| - \| a_{ij}(t) \| \} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\| =$$

$$= \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\|.$$

L'égalité (3) peut être écrite d'une façon condensée sous forme symbolique

$$\frac{d}{dt}\,\|a(t)\| = \left\|\frac{d}{dt}\,a_{ij}(t)\right\| \tag{4}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\,\|a(t)\| = \left\|\frac{d}{dt}\,a(t)\right\|. \tag{5}$$

Il est parfois commode d'utiliser au lieu du symbole de dérivation $\frac{d}{dt}$ le symbole D ; l'égalité (5) s'écrit alors :

$$D\,\|a\| = \|Da\|. \tag{6}$$

D é f i n i t i o n 2. On appelle *intégrale* d'une matrice $\|a(t)\|$ et l'on note

$$\int_{t_0}^{t} \|a(z)\|\,dz,$$

la matrice dont les éléments sont les intégrales des élements respectifs de la matrice initiale :

$$\int_{t_0}^{t} \|a(z)\|\,dz = \left\|\begin{matrix} \int_{t_0}^{t} a_{11}(z)\,dz \ldots \int_{t_0}^{t} a_{1n}(z)\,dz \\ \int_{t_0}^{t} a_{21}(z)\,dz \ldots \int_{t_0}^{t} a_{2n}(z)\,dz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{t_0}^{t} a_{m1}(z)\,dz \ldots \int_{t_0}^{t} a_{mn}(z)\,dz \end{matrix}\right\|, \tag{7}$$

ou simplement :

$$\int_{t_0}^{t} \|a(z)\|\,dz = \left\|\int_{t_0}^{t} a_{ij}(z)\,dz\right\|, \tag{8}$$

ou encore

$$\int_{t_0}^{t} \|a(z)\|\,dz = \left\|\int_{t_0}^{t} a(z)\,dz\right\|. \tag{9}$$

On désigne parfois le symbole $\int_{t_0}^{t} (\ )\,dz$ par une seule lettre, par exemple S et, dans ce cas, on peut, de même que (6), mettre l'égalité (9) sous la forme :

$$S\,\|a\| = \|Sa\|. \tag{10}$$

§ 17. Ecriture matricielle d'un système d'équations différentielles et des solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients constants

Considérons un système de n équations différentielles linéaires comportant n fonctions inconnues $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Les coefficients a_{ij} sont constants. Introduisons la notation :

$$\| x \| = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

C'est la matrice des solutions ou la solution vectorielle du système (1). Définissons ensuite la matrice des dérivées des solutions .

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Ecrivons la matrice des coefficients du système d'équations différentielles

$$\| a \| = \| a_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Utilisant la règle de multiplication des matrices (cf. § 4), nous pouvons écrire le système d'équations différentielles (1) sous forme

matricielle

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

ou simplement, en vertu de la règle de dérivation des matrices,

$$\frac{d}{dt} \| x(t) \| = \| a \| \cdot \| x \|. \tag{6}$$

On peut également mettre cette équation sous une forme plus compacte :

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{7}$$

où x est appelée également *solution vectorielle*, a est la notation condensée de la matrice $\| a_{ij} \|$.

Posons

$$\| \alpha \| = \boldsymbol{\alpha} = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{matrix} \right\|, \tag{8}$$

où α_i sont des nombres.

Nous nous proposons de chercher l'ensemble des solutions du système d'équations différentielles sous la forme (cf. formule (2) du § 30, ch. XIII)

$$\| x \| = e^{kt} \cdot \| \alpha \| \tag{9}$$

ou

$$x = e^{kt} \boldsymbol{\alpha}. \tag{10}$$

Portant (10) dans (7) (ou (9) dans (6)) et utilisant la règle de multiplication d'une matrice par un nombre et la règle de dérivation des matrices, nous obtenons :

$$ke^{kt} \boldsymbol{\alpha} = ae^{kt} \boldsymbol{\alpha}, \tag{11}$$

d'où nous trouvons :

$$k\boldsymbol{\alpha} = a\boldsymbol{\alpha}$$

ou encore

$$a\boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\alpha} = 0. \tag{12}$$

Rappelons que dans cette dernière égalité a est la matrice (4), k est un nombre, α la matrice-colonne (8). Nous pouvons alors écrire la matrice figurant au premier membre de l'égalité (12) de la manière suivante :

$$(a - kE)\,\alpha = 0, \tag{13}$$

où E est la matrice unité du n-ième ordre. Sous forme explicite l'égalité (13) s'écrit :

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn}-k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = 0. \tag{14}$$

L'égalité (12) montre que le vecteur α est transformé à l'aide de la matrice a en un vecteur parallèle $k\alpha$. Par conséquent, le vecteur α est un vecteur propre de la matrice a correspondant à la valeur propre k (cf. § 11).

Sous forme scalaire on peut écrire l'égalité (12) comme un système d'équations algébriques (cf. système (3), § 30, ch. XIII). Le nombre k doit être déterminé à partir de l'équation (5) du § 30, ch. XIII que l'on peut écrire ainsi sous forme matricielle :

$$\Delta\,(a - kE) = 0, \tag{15}$$

autrement dit, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

doit être nul.

Supposons que toutes les racines de (16) soient distinctes :

$$k_1, \quad k_2, \quad \dots, \; k_n.$$

Pour chaque valeur k_i du système (13) on détermine la matrice des valeurs α

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n^{(i)} \end{Vmatrix}$$

(l'une de ces valeurs est arbitraire). Par conséquent, la solution du système (1) s'écrira sous forme matricielle

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n e^{k_n t} \end{matrix} \right\|, \tag{17}$$

où C_i sont des constantes, ou simplement

$$\| x \| = \| \alpha \| \cdot \| C e^{kt} \|. \tag{18}$$

Sous forme scalaire la solution est donnée par les formules (6) du § 30, ch. XIII.

Exemple 1. Ecrire sous forme matricielle le système et la solution du système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2.$$

Solution. Ecrivons la matrice du système

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Sous forme matricielle le système d'équations s'écrira (cf. l'équation (5)).

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|.$$

Formons l'équation caractéristique (15) et trouvons ses racines

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0, \text{ c'est-à-dire } k^2 - 5k + 4 = 0,$$

par conséquent,

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$$

Formons le système (14) pour déterminer les valeurs $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ correspondant à la racine $k_1 = 1$:

$$(2-1)\,\alpha_1^{(1)} + \qquad 2\alpha_2^{(1)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(1)} + (3-1)\,\alpha_2^{(1)} = 0.$$

Posant $\alpha_1^{(1)} = 1$, nous obtenons $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Nous trouvons de même $\alpha_1^{(2)}$ et $\alpha_2^{(2)}$ correspondant à la racine $k_2 = 4$. Nous obtenons :

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1.$$

Nous pouvons maintenant écrire la solution du système sous forme matricielle (formule (17)) :

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{4t} \end{matrix} \right\|,$$

ou sous forme habituelle :

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Exemple 2. Ecrire sous forme matricielle le système et la solution du système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 3x_3.$$

Solution. Ecrivons la matrice du système

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Le système s'écrira donc sous forme matricielle (cf. équation (5)) :

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\|.$$

Formons l'équation caractéristique (16) et trouvons ses racines :

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 1, \text{ c'est-à-dire } (1-k)(2-k)(3-k) = 0,$$

par conséquent,

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3.$$

Déterminons à partir du système d'équations (14) les valeurs $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$ correspondant à la racine $k_1 = 1$

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + 2\alpha_3^{(1)} = 0;$$

nous trouvons :

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = -1, \quad \alpha_3^{(1)} = 0.$$

Déterminons les valeurs $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}$ correspondant à la racine $k_2=2$ à partir du système

$$\begin{aligned} -\alpha_1^{(2)} \qquad\qquad &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} \qquad\qquad &= 0, \\ \alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_3^{(2)} &= 0; \end{aligned}$$

nous trouvons :

$$\alpha_1^{(2)}=0, \quad \alpha_2^{(2)}=1, \quad \alpha_3^{(2)}=-1.$$

Déterminons les valeurs $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ correspondant à la racine $k_3=3$ à partir du système

$$\begin{aligned} -2\alpha_1^{(3)} \qquad &= 0, \\ \alpha_1^{(3)}-\alpha_2^{(3)} &= 0, \\ \alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(3)} &= 0; \end{aligned}$$

nous trouvons :

$$\alpha_1^{(3)}=0, \quad \alpha_2^{(3)}=0, \quad \alpha_3^{(3)}=1.$$

Ecrivons la solution du système sous forme matricielle (cf. formule (17))

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{Vmatrix}$$

ou sous forme usuelle

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1e^t, \\ x_2 &= -C_1e^t+C_2e^{2t}, \\ x_3 &= -C_2e^{2t}+C_3e^{3t}. \end{aligned}$$

§ 18. Ecriture matricielle d'une équation linéaire du n-ième ordre

Soit donnée une équation différentielle linéaire du n-ième ordre à coefficients constants

$$\frac{d^nx}{dt^n}=a_n\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\ldots+a_1x. \tag{1}$$

Notons qu'il apparaîtra de la suite de notre exposé qu'il est particulièrement commode d'employer pour les coefficients la numération adoptée. Posons $x=x_1$, et ensuite

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\ldots\ldots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ecrivons la matrice des coefficients de ce système

$$\|a^*\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Nous pouvons alors écrire le système (2), de même que la formule (5) du § 17, sous la forme:

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{4}$$

ou plus simplement

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \|a^*\| \cdot \|x\|. \tag{5}$$

On trouve ensuite la solution en procédant de même qu'au § 17, puisque l'équation matricielle (5) est un cas particulier de l'équation (6) du § 17.

Exemple. Ecrire sous forme matricielle l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p\frac{dx}{dt} + qx.$$

Solution. Posons $x = x_1$; nous avons alors

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = px_2 + qx_1.$$

Sous forme matricielle le système d'équations s'écrira:

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}.$$

§ 19. Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables par la méthode des approximations successives en utilisant l'écriture matricielle

Soit à trouver la solution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

vérifiant les conditions initiales

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \ \ldots, \quad x_n = x_{n0} \text{ pour } t = t_0. \tag{2}$$

Si l'on introduit, outre la matrice des coefficients du système et la matrice des solutions, la matrice des valeurs initiales

$$\| x_0 \| = \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

alors le système (1) avec les conditions initiales (2) s'écrira :

$$\frac{d}{dt} \| x \| = \| a(t) \| \cdot \| x \| \tag{4}$$

avec les conditions initiales

$$\| x \| = \| x_0 \| \quad \text{pour} \quad t = t_0. \tag{5}$$

Ici $\| a(t) \|$ désigne de nouveau la matrice des coefficients du système.

Nous résolverons ce problème par la méthode des approximations successives.

Pour faciliter la compréhension de notre exposé appliquons tout d'abord la méthode des approximations successives à une équation différentielle linéaire du premier ordre (cf. ch. XIV, § 26).

Nous devons trouver la solution d'une équation

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x \tag{6}$$

avec les conditions initiales

$$x = x_0 \quad \text{pour} \quad t = t_0. \tag{7}$$

Nous supposerons que $a(t)$ est une fonction continue. Comme nous l'avons indiqué au § 26 du ch. XVI, la solution de l'équation différentielle (6) pour la condition initiale (7) se ramène à la solution de l'équation intégrale

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\, x(z)\, dz. \tag{8}$$

Nous résolverons cette équation par la méthode des approximations successives

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\, x_0\, dz, \\ x_2 &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\, x_1(z)\, dz, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\, x_{m-1}(z)\, dz, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Introduisons pour abréger l'écriture l'opérateur d'intégration S

$$S(\ ) = \int_{t_0}^{t} (\ )\, dz. \tag{10}$$

Nous pouvons alors, en utilisant l'opérateur S, écrire l'égalité (9) sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + S(ax_0), \\ x_2 &= x_0 + S(ax_1) = x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))), \\ x_3 &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))))), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a \dots)))))))). \end{aligned}$$

Ouvrant les parenthèses nous obtenons :

$$x_m = x_0 + Sax_0 + Sa\,Sax_0 + Sa\,Sa\,Sax_0 + \dots + \\ + \underbrace{Sa\,Sa\,Sa \dots Sa}_{m \text{ fois}}x_0.$$

Mettant x_0 en facteur (x_0 est une constante), nous avons :

$$x_m = [1 + Sa + Sa\,Sa + \ldots + \underbrace{Sa\,Sa \ldots Sa}_{m \text{ fois}}]\,x_0. \tag{11}$$

Nous avons démontré plus haut (au § 26 du ch. XVI) que, si $a(t)$ est une fonction continue, la suite $\{x_m\}$ converge. La limite de cette suite est une série convergente :

$$x = [1 + Sa + Sa\,Sa + \ldots]\,x_0. \tag{12}$$

Remarque. Si $a(t) = \text{const}$, la formule (12) prend une forme simple. En effet, en vertu de (10), nous pouvons écrire

$$Sa = aS1 = a(t - t_0),$$

$$Sa\,Sa = a^2 S(t - t_0) = a^2 \frac{(t - t_0)^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underbrace{Sa\,Sa \ldots Sa}_{m \text{ fois}} = a^m \frac{(t - t_0)^m}{m!}.$$

Dans ce cas (12) se met sous la forme

$$x = \left[1 + a\frac{t - t_0}{1} + a^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \ldots + a^m \frac{(t - t_0)^m}{m!} + \ldots\right] x_0$$

ou

$$x = x_0 e^{a(t - t_0)}. \tag{13}$$

La méthode de résolution d'une équation (6) que nous venons de donner se transpose intégralement au cas de la résolution du système (1) avec les conditions initiales (2).

Sous forme matricielle le système (1) avec les conditions initiales (2) s'écrira :

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \|a(t)\| \cdot \|x\| \tag{14}$$

avec les conditions initiales

$$\|x\| = \|x_0\| \quad \text{pour} \quad t = t_0. \tag{15}$$

Utilisant la règle de multiplication et d'intégration des matrices, on peut ramener la solution du système (14) avec la condition (15) à la solution de l'équation matricielle intégrale

$$\|x(t)\| = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|a(z)\| \cdot \|x(z)\|\,dz. \tag{16}$$

Nous trouvons les approximations successives

$$\| x_m(t) \| = \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| a(z) \| \cdot \| x_{m-1}(z) \| \, dz. \tag{17}$$

En portant successivement les approximations successives sous le signe d'intégration, la solution du système sous forme matricielle aura l'expression :

$$\| x(t) \| = \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| a(z_1) \| \left(\| x_0 \| + \int_{t_0}^{z_1} \| a(z_2) \| \left(\| x_0 \| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{t_0}^{z_2} \| a(z_3) \| (\ldots) \, dz_3 \right) dz_2 \right) dz_1$$

ou

$$\| x(t) \| = \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| a(z_1) \| \cdot \| x_0 \| \, dz_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \| a(z_1) \| \int_{t_0}^{z_1} \| a(z_2) \| \cdot \| x_0 \| \, dz_2 \, dz_1 + \ldots \tag{18}$$

Utilisant l'opérateur d'intégration S, on peut mettre l'égalité (18) sous la forme :

$$\| x(t) \| = [\| E \| + S \| a \| + S \| a \| S \| a \| + \ldots] \cdot \| x_0 \|. \tag{19}$$

Notons par une seule lettre $\mathscr{E}_{\|a\|}^{(t_0 t)}$ l'opérateur figurant entre crochets. L'égalité (19) s'écrit alors sous une forme compacte

$$\| x(t) \| = \mathscr{E}_{\|a(t)\|}^{(t_0 t)} \| x_0 \|. \tag{20}$$

Il est intéressant de souligner la circonstance suivante. Si les coefficients du système (1) sont constants, nous pouvons écrire, en utilisant la règle permettant de sortir du symbole désignant la matrice un facteur commun à tous les éléments de cette matrice *)

$$S \| a \| = \frac{t - t_0}{1} \| a \|,$$

$$S \| a \| S \| a \| = \frac{(t - t_0)^2}{2!} \| a \|^2,$$

$$S \| a \| S \| a \| S \| a \| = \frac{(t - t_0)^3}{3!} \| a \|^3, \text{ etc.}$$

*) Ici nous laissons de côté le problème du passage à la limite pour les opérations effectuées avec les matrices.

Dans le cas des coefficients constants la formule (19) s'écrira

$$\| x(t) \| = \left[\| E \| + \frac{t-t_0}{1} \| a \| + \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2} \| a \|^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(t-t_0)^m}{m!} \| a \|^m + \ldots \right] \| x_0 \|. \tag{21}$$

Cette dernière égalité peut s'écrire symboliquement :

$$\| x(t) \| = e^{(t-t_0)\|a\|} \| x_0 \|. \tag{22}$$

Exercices

1. Trouver la matrice de transformation inverse pour la transformation linéaire

$$y_1 = 3x_1 + 2x_2, \quad y_2 = 7x_1 + 5x_2.$$

Rép. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{Vmatrix}$.

2. Trouver la matrice de la transformation inverse

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_1.$$

Rép. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

3. Calculer le produit des matrices $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$.

Rép. $\begin{Vmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{Vmatrix}$.

4. Calculer les produits AB et BA des matrices

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Rép. $\begin{Vmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$.

5. Soit $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

E est la matrice unité du 3-ième ordre. Calculer la matrice $A + 2E$.

Rép. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$.

6. Soit $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. Calculer la matrice A^2.

Rép. $\begin{Vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{Vmatrix}$.

7. Soit $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. Calculer $A^2 + 5A$.

Rép. $\begin{Vmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{Vmatrix}$.

8. Calculer la matrice inverse A^{-1} si

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{Vmatrix}. \quad \text{Rép.} \begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

9. Ecrire la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \end{aligned}$$

sous forme matricielle et calculer x_1, x_2, x_3.

$$\text{Rép.} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix}, \quad x_1 = 30, \quad x_2 = 20, \quad x_3 = -60.$$

10. Ecrire la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11, \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11{,}5 \end{aligned}$$

sous forme matricielle et calculer x_1, x_2, x_3.

$$\text{Rép.} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 11 \\ 11{,}5 \end{Vmatrix}, \quad x_1 = 0{,}5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1{,}5.$$

11. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Rép. $k_1 = 6$, $k_2 = k_3 = -3$; $\boldsymbol{\tau}_1 = m\boldsymbol{i} + \frac{1}{2} m\boldsymbol{j} - m\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\tau}_2$ est un vecteur arbitraire vérifiant la condition $(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2) = 0$, m est un nombre arbitraire.

12. Trouver les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

Rép. Ils n'existent pas.

13. Calculer les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}. \quad \text{Rép. Tout vecteur est un vecteur propre.}$$

14. Trouver la solution matricielle du système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dx_1}{dt} + x_2 = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} + 4x_1 = 0.$$

Rép.

$$x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad x_2 = -2\,(C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}).$$

ANNEXES

Table 1

Valeurs de la fonction $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

et de la fonction réduite de Laplace $\hat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x)$

x	$\Phi(x)$	Δ	$\hat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\Phi(x)$	Δ	$\hat{\Phi}(x)$	Δ
0,00	0,0000	564	0,0000	269	2,25	0,9985	3	0,8709	83
0,05	0,0564	561	0,0269	269	2,30	0,9988	3	0,8792	79
0,10	0,1125	555	0,0538	268	2,35	0,9991	2	0,8871	74
0,15	0,1680	547	0,0806	267	2,40	0,9993	2	0,8945	71
0,20	0,2227	536	0,1073	266	2,45	0,9995	1	0,9016	66
0,25	0,2763	523	0,1339	265	2,50	0,9996	1	0,9082	64
0,30	0,3286	508	0,1604	262	2,55	0,9997	1	0,9146	59
0,35	0,3794	490	0,1866	261	2,60	0,9998	0	0,9205	56
0,40	0,4284	471	0,2127	258	2,65	0,9998	1	0,9261	53
0,45	0,4755	450	0,2385	256	2,70	0,9999	0	0,9314	50
0,50	0,5205	428	0,2641	252	2,75	0,9999	0	0,9364	46
0,55	0,5633	406	0,2893	250	2,80	0,9999		0,9410	44
0,60	0,6039	381	0,3143	246	2,85			0,9454	41
0,65	0,6420	358	0,3389	243	2,90			0,9495	39
0,70	0,6778	334	0,3632	238	2,95			0,9534	36
0,75	0,7112	309	0,3870	235	3,00	1,0000		0,9570	33
0,80	0,7421	286	0,4105	231	3,05			0,9603	32
0,85	0,7707	262	0,4336	226	3,10			0,9635	29
0,90	0,7969	240	0,4562	221	3,15			0,9664	27
0,95	0,8209	218	0,4783	217	3,20			0,9691	25
1,00	0,8427	197	0,5000	212	3,25			0,9716	24
1,05	0,8624	178	0,5212	207	3,30			0,9740	21
1,10	0,8802	159	0,5419	201	3,35			0,9761	21
1,15	0,8961	142	0,5620	197	3,40			0,9782	36
1,20	0,9103	126	0,5817	191	3,50			0,9818	30
1,25	0,9229	111	0,6008	186	3,60			0,9848	26
1,30	0,9340	98	0,6194	181	3,70			0,9874	22
1,35	0,9438	85	0,6375	175	3,80			0,9896	19
1,40	0,9523	74	0,6550	169	3,90			0,9915	15
1,45	0,9597	64	0,6719	164	4,00			0,9930	13
1,50	0,9661	55	0,6883	159	4,10			0,9943	11
1,55	0,9716	47	0,7042	153	4,20			0,9954	9
1,60	0,9736	41	0,7195	147	4,30			0,9963	7
1,65	0,9804	34	0,7342	143	4,40			0,9970	6
1,70	0,9838	29	0,7485	136	4,50			0,9976	5
1,75	0,9867	24	0,7621	132	4,60			0,9981	4
1,80	0,9891	20	0.7753	126	4,70			0,9985	3
1,85	0,9911	17	0,7879	121	4,80			0,9988	3
1,90	0,9928	14	0,8000	116	4,90			0,9991	2
1,95	0,9942	11	0,8116	111	5,00			0,9993	1
2,00	0,9953	10	0,8227	105	5,10			0,9994	2
2,05	0,9963	7	0.8332	102	5,20			0,9996	1
2,10	0,9970	6	0,8434	96	5,30			0,9997	0
2,15	0,9976	5	0,8530	92	5,40			0,9997	
2,20	0,9981	4	0,8622	87					

Table 2

Valeurs de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,3989	1,35	0,1604	2,70	0,0104
0,05	0,3984	1,40	0,1497	2,75	0,0091
0,10	0,3970	1,45	0,1394	2,80	0,0079
0,15	0,3945	1,50	0,1295	2,85	0,0069
0,20	0,3910	1,55	0,1200	2,90	0,0060
0,25	0,3867	1,60	0,1109	2,95	0,0051
0,30	0,3814	1,65	0,1023	3,00	0,0044
0,35	0,3752	1,70	0,0940	3,05	0,0038
0,40	0,3683	1,75	0,0863	3,10	0,0033
0,45	0,3605	1,80	0,0790	3,15	0,0028
0,50	0,3521	1,85	0,0721	3,20	0,0024
0,55	0,3429	1,90	0,0656	3,25	0,0020
0,60	0,3332	1,95	0,0596	3,30	0,0017
0,65	0,3230	2,00	0,0540	3,35	0,0015
0,70	0,3123	2,05	0,0488	3,40	0,0012
0,75	0,3011	2,10	0,0440	3,45	0,0010
0,80	9,2897	2,15	0,0396	3,50	0,0009
0,85	0,2780	2,20	0,0355	3,55	0,0007
0,90	0,2661	2,25	0,0317	3,60	0,0006
0,95	0,2541	2,30	0,0283	3,65	0,0005
1,00	0,2420	2,35	0,0252	3,70	0,0004
1,05	0,2299	2,40	0,0224	3,75	0,0004
1,10	0,2179	2,45	0,0198	3,80	0,0003
1,15	0,2059	2,50	0,0175	3,85	0,0002
1,20	0,1942	2,55	0,0154	3,90	0,0002
1,25	0,1826	2,60	0,0136	3,95	0,0002
1,30	0,1714	2,65	0,0119	4,00	0,0001

Table 3

Valeurs de la fonction $\overline{\Phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\overline{\Phi(x)}$	x	$\overline{\Phi(x)}$	x	$\overline{\Phi(x)}$
0,00	0,0000	0,95	0,3289	1,90	0,4713
0,01	0,0040	1,00	0,3413	2,00	0,4772
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,10	0,4821
0,10	0,0398	1,10	0,3643	2,20	0,4861
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,30	0,4893
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,40	0,4918
0,25	0,0987	1,25	0,3944	2,50	0,4938
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,60	0,4953
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,70	0,4965
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,80	0.4974
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,90	0,4981
0,50	0,1915	1,50	0,4332	3,00	0,49865
0,55	0,2088	1,55	0,4394	3,20	0,49931
0,60	0,2257	1,60	0,4452	3,40	0,49966
0,65	0,2422	1,65	0,4505	3,60	0,499841
0,70	0,2580	1,70	0,4554	3,80	0,499927
0,75	0,2734	1,75	0,4599	4,00	0,499968
0,80	0,2881	1,80	0,4641	4,50	0,499997
0,85	0,3023	1,85	0,4678	5,00	0,500000
0,90	0,3159				

INDEX

Aires planes 192
d'un domaine 245
de surfaces 205
Amplitude complexe 109, 389, 395
Analyse harmonique 386
Application(s)
affine 563
biunivoque (non dégénérée) 563
dégénérée 563
inverse 563
linéaire 557
univoque 562
Approximation
deuxième 340
en moyenne 373
nulle 340
première 340
Astroïde 54

Calcul
de logarithmes 323
du nombre π 323
opérationnel 444
Cas (chances) 482
favorable 482
Causes (hypothèses) 493
Centre 138
de dispersion 540
de la distribution des probabilités 505, 520
de gravité d'une courbe gauche 255
— d'une figure plane 215
Cercle de convergence 338
Chaînette 17
Champ
de directions 22
irrotationnel 269
potentiel 269
solénoïdal 269
tubulaire 269
Changement de variables dans une intégrale double 200-205
— — triple 223-226
Circulation d'un vecteur 241, 263
Coefficients de Fourier 359
Cofacteur 572
Condition(s)
de convergence des séries 280, 283, 285, 289, 290
aux frontières 408, 415
initiales 20, 62, 408, 415
aux limites 408
de Lipschitz 342
suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier 383
Convergence
, intervalle de 310
, rayon de 311
Convolution 465
, transformation de 465
Coordonnées
curvilignes 201
cylindriques 223
sphériques 225
Courbe de distribution 512
intégrale 21, 68, 131
— de distribution 515
Critère suffisant pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier 360

Densité
de probabilité 512, 536
spectrale 395
superficielle 209
Dérivation de l'image 451
Dérivée à droite (à gauche) 383
Déterminant
fonctionnel 203
de Wronski 77
Développement
en série de Fourier 371
— de Maclaurin arc sin x 323
— — ch x 320
— — cos x 320
— — e^x 319

Développement
en série de Maclaurin Log $(1+x)$ 323
— — sin x 318
— — sh x 320
— — $(1+x)^m$ 321
Directions principales de la forme quadratique 589
Dispersion
, centre de 540
, ellipse(s) de 540
, — totale de 541
Distribution
de masse 209
stationnaire de la température 427
Divergence du vecteur 267
Domaine
de convergence 300
, diamètre de 217
fermé 176
d'intégration 177
régulier 179, 193, 217
Ecart(s) 505
maximum 373, 374
médian 529
moyen(s) 507, 520
probables principaux 540
quadratique(s) 373, 374
Egalité de Liapounov-Parseval 377
Ellipse 246
de dispersion 540, 541
—, vecteur de 401
Ellipsoïde 222
Enveloppe 44
Equation(s)
de Bernoulli 38
de Bessel 331
caractéristique 84
—, racines de 122
de la chaleur 415
de Clairaut 53
de continuité 429
des cordes vibrantes 408
aux dérivées partielles 18
aux différences finies 439
différentielle 15, 18
—, intégrale de 19
—, — générale de 20, 63
—, — particulière de 21
— linéaires homogènes 76-90
— — non homogènes 76, 91-105
— — du premier ordre 34
— ordinaires 18
—, ordre de 18
— d'ordre n 76, 598
—, solution de 19
Equation(s)
différentielle, solution générale de 20, 62
—, — particulière de 21, 63
aux différentielles totales 39
— —, intégration de 39
de Fourier 405
homogènes 29
intégrale 340, 392
de Lagrange 55
de Laplace 271, 405, 406, 427, 428
— en coordonnées cylindriques 433
des ondes 408
de la propagation de la chaleur dans une barre 419
— — l'espace 418
du télégraphe 409
du type elliptique 405
— hyperbolique 405
— parabolique 405
à variables séparables (séparées) 26 (25)
Erreur(s)
arithmétique moyenne 534
de mesure 545
, échelle de dispersion des 533
Espace E_n 399
des fonctions Φ 400-401
Espérance mathématique 502, 518, 522
Evénement(s) aléatoire(s) 480
certain 482
— compatibles 487
— contraires 486
— équiprobables 482
— impossible 482
— incompatibles 482
— indépendant 488
, somme des 484

Facteur intégrant 42
Flexion des poutres 64
Flux du champ vectoriel 257, 267
Fonction(s)
de Bessel 333, 335, 398
— de première espèce d'ordre p 333
—, racines de 398
— de seconde espèce d'ordre n 334
— — — — zéro 335
continue par tranches 377
delta (fonction unité) 475
de Dirac 475
de distribution normale 529
, espace de 400
harmonique 271, 427

Foction(s)
homogène de degré n 29
impaire, développement en série de Fourier de 368, 369
intégrale de la loi de distribution normale 529
de Laplace 528
linéairement dépendantes (indépendantes) 89
monotone par tranches 359
original (objet) 445
orthogonale avec un poids $\rho(x)$ 398
paire, développement en série de Fourier de 368, 369
propres 412
réduite de Laplace 531
de répartition 515, 539
spectrale 395
unité de Heaviside $\sigma_0(t)$ 446
Formule
d'Adams 149
de Bayes 494
d'Euler 320, 338
de Green 250, 273
de Liouville 78
d'Ostrogradsky 267
d'Ostrogradsky-Gauss 267
des probabilités totales 492
de Stokes 263
de Taylor 317
Foyer stable (instable) 135, 136
Fréquence relative d'un événement 480

Gradient 267, 268
Grille 438
Groupement 546

Harmonique(s) 388
Histogramme 547

Image(s) 445, 447
des dérivées 453
, dictionnaire d' 454
de la fonction delta 474
des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante 447
, linéarité de l' 448
L (transformée de Laplace) 445
— ch αt 450
— cos t 447
— $e^{-\alpha t}$ 450
— de Heaviside 446
— sin t 447
— sh αt 450
Image
de la fonction t^n 453
Inégalité
de Bessel 377
de Bouniakovsky 214
de Schwarz 214
Intégrale
curviligne 239, 242
dépendant d'un paramètre 229
de Dirichlet 381
double 177, 179
— en coordonnées polaires 229
de Fourier 390, 394
générale 20, 63
d'une matrice 592
particulière 21
de Poisson 198, 425, 437
de probabilité 525
singulier 52
de surface 256
triple 217, 218
— en coordonnées cylindriques 223
— — sphériques 225
, valeur principale de 394
Intégration
des équations différentielles, applications des séries 327
graphique 74
Intervalle de convergence 310
Isocline 22

Jacobien 203, 226

Ligne
brisée d'Euler 143
de courant 58
équipotentielle 58
de force 59
de niveau 58
Loi
de Coulomb 259
de distribution 495, 512
— binomiale 499
— normale 521
— uniforme 516
de Gauss 521
des grands nombres 554
intégrale de distribution 515
normale de distribution dans le plan 539

Masse de la figure 216
Matériel statistique 545

Matrice(s) 557, 560
adjointe 572
de l'application 557
carrée 561
colonne 562
, dérivée de 591
, déterminant de 558, 561
diagonale 561
égales 562
élargie 590
, équation caractéristique de 571
de la forme quadratique 588
, intégrale de 591
inverse 563, 570
ligne 562
, opérations sur 564-569
orthogonale 579, 580
, rang de 589
régulière (singulière) 590
symétrique 561
transposée 561
unité 561, 568
, vecteur propre de 580
Médiane 521, 523
Mesure de précision 535
Méthode
des différences finies 419-421, 437-440
d'Euler 142
de Fourier 410
de Runge-Kutta 153
de séparation des variables 410
Métrique
de l'espace Φ 401
quadratique 401
Mineur 589
Mode 496, 521
Moment(s)
centrés de la variable aléatoire 509
d'inertie d'un corps 227
— d'une figure 211
— d'un point matériel 210
— d'un système de points 210
statique 216
Moyenne
arithmétique des valeurs de la variable aléatoire 502
pondérée 549
statistique 548

Nœud(s)
de grille 438
stable (instable) 131 (133)
Nombre d'onde 389, 395
Norme de l'élément 400

Opérateur
hamiltonien 268
de Laplace 270, 418, 427
nabla (∇) 268
Original (fonction objet) 445
Oscillations 105, 466
amorties 110, 469
, amplitude de 108
forcées 107, 110
, fréquence de 108
harmoniques 108, 469
libres 107, 469
, période de 108
, phase initiale de 108

Parabole de sûreté 48
Pendule mathématique 70
Point
intérieur du domaine 178
ordinaire 53
singulier 53
Potentiel
du champ d'attraction 265
d'un courant électrique 431
du vecteur 253
des vitesses 58
Probabilité(s) 481-483
d'appartenance d'une valeur de la variable aléatoire à un intervalle donné 512, 525
, courbe de densité de 512
de la fréquence relative 497
géométrique 487
, polygone de distribution de 495
Problème
de Dirichlet 427
de Dirichlet-Neumann 430
aux limites, premier (deuxième) 415, 427 (428)
de Neumann 428, 430
des oscillations électriques 408
du tir jusqu'au premier coup au but 497
Produit
de composition 465
des matrices 566
scalaire des fonctions 400
— des vecteurs 399
Progression géométrique 278
Propagation de la chaleur 413, 421, 425

Rayon 193
de convergence de la série 311

Règle
de Cauchy pour la convergence d'une série 289
de d'Alembert pour la convergence d'une série 285
de L'Hospital 475
des trois sigmas 533
Résonance 115, 473
, courbes de 112
Ressort, rigidité de 106
Reste de la série 300
Rotation d'angle 558
Rotationnel 262

Schéma à urnes 484
Selle dégénérée 133, 140
Série(s) 277
absolument convergente 298
alternée 294
, continuité de la somme de 303, 313
convergente 276
divergente 276
entière (de puissance) 309, 315
de fonctions 300
de Fourier 359
harmonique 281
, intégration et dérivation de 306-309, 313-315
de Maclaurin 318
majorables 301
numérique 277
semi-convergente 298
de Taylor 316
à termes de signes quelconques 296
trigonométrique 356
uniformément convergente 302
Solution(s)
complexe 109
générale 20, 62
linéairement dépendantes (indépendantes) 77
particulière 21, 63
singulière 52
stables au sens de Liapounov 128
Somme
double 179
intégrale 176, 217
partielle d'une série 277
d'une série 277
—, continuité de 303
Spectre
continu 395
discret 389
Sphère 208, 223
Spirale logarithmique 61
Stabilité des solutions de systèmes d'équations 128-141
Système(s)
autonome 129
d'équations différentielles 115
— —, écriture matricielle du 593
exhaustif (complet) 482
normal d'équations différentielles 115
de polynômes orthogonaux de Le Gendre 398
de base 577
de l'espace Φ 401
, module (longueur) 399
orthogonaux 399
propre de la matrice 580
tourbillon 262

Termes de la série 277
Théorème(s)
d'Abel 309
de Bernoulli 481
des causes 494
de convolution 463
de décomposition 460
du déplacement 449
d'existence des intégrales 177, 217, 242, 256
d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle 20, 62, 341, 346
des forces vives 264
de Laplace 553
de Leibniz 294
de Liapounov 550
limite central 550
de Peano 345
du retard 473
de Tchébychev 549
d'unicité 446
Théorie des probabilités 481
Trajectoires
de l'équation différentielle 131
isogonales 57
orthogonales 57, 60
Transformation(s)
identique 569
linéaires des coordonnées 557
orthogonale 577
de similitude 584
de symétrie 559
Transformée
de Fourier 395
inverse de Fourier 395
de Laplace (image L) 445
Transformée-cosinus de Fourier 392

Transformée-sinus de Fourier 392
Translation dans la direction de l'axe 559
Travail 238, 247

Valeur(s)
observées 545
principale de l'intégrale 394
propres 412, 580
Variable aléatoire
bidimensionnelle 535
centrée (écart) 505
Variable aléatoire
continue 511
discrète 495
Variance (fluctuation)
empirique 549, 552
de la variable aléatoire 506, 507, 520, 524
Vecteur(s)
Vitesse
cosmique, deuxième 72
de désintégration du radium 26

Wronskien 77

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur la traduction et la présentation de ce livre, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse: Editions Mir
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I—110, GSR, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL
en deux volumes

Cet ouvrage est un manuel de mathématiques destiné aux étudiants des établissements d'enseignement technique supérieur.

En plus des développements habituellement traités dans les cours d'analyse mathématique, il contient l'exposé des notions indispensables aujourd'hui pour l'assimilation des disciplines liées à l'automation et aux méthodes de calcul automatique.

Dans le premier volume, par exemple, on trouvera: «Etablissement d'une dépendance fonctionnelle à partir des données expérimentales par la méthode des moindres carrés» et «Formule d'interpolation de Newton. Dérivation numérique»; dans le second volume: «Intégration numérique des équations différentielles», «Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires», «Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov», «Opérateur hamiltonien», «Intégrale de Fourier», ainsi que «Equations de la physique mathématique» (chap. XVIII), «Calcul opérationnel et applications» (chap. XIX), «Eléments de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique» (chap. XX), «Matrices. Ecriture matricielle des systèmes et résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires» (chap. XXI).

De nombreux problèmes et exercices accompagnent chaque chapitre du cours et facilitent l'assimilation de la partie théorique. Certains ont été résolus et commentés à titre d'exemples. Cela rend l'usage de ce manuel particulièrement précieux pour les autodidactes.

Le présent ouvrage a été réédité 9 fois en russe et traduit également en anglais et en espagnol.